ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 26, n. 1, 2018

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2018

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
“Incontri con la matematica”

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 26, n. 1, 2018

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1 - Aprile 2018

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.
Logo dell'Associazione "Incontri con la matematica" fondata nel 2010 con sede in Bologna.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Redazione: Maura Iori (maura@iori-maura.191.it)

Direttore responsabile: Bruno D'Amore
Proprietà Direzione Amministrazione Redazione, presso Associazione Incontri con la Matematica

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia e Associazione Incontri con la Matematica, Bologna, Italia.

Indice

Algebra-related tasks: Teachers' guidance in curriculum materials

Eleni Demosthenous[1] and Andreas Stylianides[2]
[1]*University of Cyprus, Cyprus*
[2]*University of Cambridge, United Kingdom*

Abstract. *Researchers and curriculum frameworks recommend engaging students with algebra-related topics starting from primary school. Even though algebra-related topics hold a place in curriculum materials, little research has focused on the nature of the opportunities in textbooks and on the guidance for teachers. Curriculum materials present the learning opportunities for students but also indicate to teachers what mathematics to teach and how to enact the intended opportunities. This paper presents an analytic framework for examining the guidance offered to teachers to enact the algebra-related tasks in curriculum materials. It presents findings from the application of the framework to examine the teachers' guides of the textbook series used in the state schools in Cyprus. Implications for curriculum design, research, and practice are discussed.*

Keywords: algebra-related topics, curriculum materials, teachers' guidance, curriculum design.

Sunto. *I ricercatori e le indicazioni curriculari raccomandano di coinvolgere gli studenti su temi legati all'algebra fin dalla scuola primaria. Anche se i temi legati all'algebra hanno un posto nei materiali curriculari, poca ricerca si è concentrata sulla natura delle opportunità offerte dai libri di testo e sulle guide offerte agli insegnanti. I materiali curriculari presentano alcune opportunità di apprendimento per gli studenti, ma indicano anche agli insegnanti quale matematica insegnare e come attuare le opportunità previste. Questo articolo presenta un quadro analitico per esaminare le guide offerte agli insegnanti per promuovere attività legate all'algebra nei materiali curriculari. Esso presenta i risultati dell'applicazione di tale quadro per esaminare le guide degli insegnanti dei libri di testo utilizzati nelle scuole statali di Cipro. Vengono inoltre discusse le implicazioni per la progettazione curricolare, la ricerca e la pratica.*

Parole chiave: temi legati all'algebra, materiali curriculari, guide per gli insegnanti, progettazione curricolare.

Resumen. *Los investigadores y los marcos curriculares recomiendan comprometer a los estudiantes con temas relacionados con el álgebra a partir de la escuela primaria. Aunque los temas relacionados con el álgebra ocupan un lugar en los materiales del plan de estudios, poca investigación se ha centrado en la naturaleza de las oportunidades de los libros de texto y en la orientación para los profesores. Los materiales curriculares presentan unas oportunidades de aprendizaje para los estudiantes, pero también indican a los profesores qué matemática enseñar y cómo* *actuar en la promulgación de las oportunidades previstas. El presente artículo ofrece un enfoque analítico para examinar la orientación ofrecida a los profesores para realizar las tareas relacionadas con el álgebra en los materiales del currículo. Presenta los resultados de la aplicación del enfoque para examinar las guías de los profesores de una serie de libros de texto utilizados en las escuelas estatales en Chipre. Se discuten también las implicaciones para el diseño curricular, la investigación y la práctica.*

Palabras clave: temas relacionados con álgebra, materiales del plan de estudios, orientación de los maestros, diseño curricular.

1. Introduction

Algebra and algebraic thinking are essential in engaging and understanding fundamental concepts both in mathematics and in other scientific domains (Usiskin, 1995). Algebra as a topic in school mathematics has been traditionally associated with the upper school levels. However, both researchers and curriculum frameworks recommend that students should be offered learning opportunities that can prepare them for formal algebra learning from primary school years (e.g. NCTM, 2000; Stacey, Chick, & Kendal, 2004).

Students build critical foundations for algebra when they learn arithmetic with understanding, by representing and justifying general relations between numbers and properties of operations (Carpenter, Franke, & Levi, 2003). In this way, they also start to understand the nature and importance of proof, and engage in sense-making activities (Carpenter, Levi, Berman, & Pligge, 2005). In addition, the nature of school algebra broadens, by providing coherence and depth in the mathematics curriculum, and prevents students' alienation resulting from a late and abrupt transition to algebra in secondary school.

The relevant field of research has so far been concerned with intervention studies that examined primary school students' capacity to engage with algebra-related topics. The findings have shown that even young students engaged successfully with algebra-related topics in supportive classroom environments (e.g. Blanton & Kaput, 2004; Carpenter et al., 2003; Carraher, Schliemann, Brizuela, & Earnest, 2006). Specifically, students were able to identify relations, reason about quantities, make justifications and generalizations using different representations, and work with patterns, functions and story problems (Dougherty, 2008; Moss & McNab, 2011).

Beyond the research studies, curriculum documents in various countries also provide opportunities for primary school students to engage with algebra-related topics (Cai, Lew, Morris, Moyer, Ng, & Schmittau, 2005). Apart from presenting the potential learning opportunities, the curriculum materials can also serve to educate teachers and improve classroom instruction (Ball & Cohen, 1996; Davis & Krajcik, 2005). Teachers' decisions about what mathematics to teach, when and how to teach it are usually mediated by the curricular materials they use (Haggarty & Pepin, 2002; Porter, 2002). Research on curriculum materials can also offer reliable feedback to curriculum developers (Cai & Cirillo, 2014).

So far, little research has been done on the nature of the algebra-related opportunities in curriculum materials and the guidance for teachers to enact these opportunities in the classroom. There is evidence to suggest that primary school teachers tend to recognise algebra-related tasks by the existence of letter symbolism or symbol manipulation (Stephens, 2008). Yet, this conception of algebra does not reflect the breadth of algebra-related topics currently mentioned in the literature. This raises concerns about how teachers engage students with tasks that have the learning potential to prepare them for algebra. Hence, there is even more need to explore what kind of guidance is provided for teachers to enact these tasks in the classroom.

The field of mathematics education lacks an analytic framework that could help in systematically examining the guidance for enacting the algebra-related opportunities in classroom. It is particularly worth conducting such investigations on topics in relation to which students and teachers face significant difficulties (Stylianides, 2014). This paper presents an analytic framework for examining the guidance for teachers and contributes in developing understanding and insight into the guidance that could be meaningful and educative for teachers to implement the tasks in classroom. The analytic framework aimed to identify the algebra-related tasks in textbooks and afterwards, to examine the respective guidance in teachers' guides.

2. Analytic framework

Below, we present the conceptualization of algebra-related tasks and components of guidance in curriculum materials.

2.1. Algebra-related tasks

Algebra-related tasks are defined, in the context of this study, as tasks that provide opportunities for students' engagement with algebraic ideas relevant to primary mathematics. Letter symbolism solely did not stand as a criterion for identifying algebra-related tasks since alphanumeric symbolism is only one of the semiotic forms of algebra (Radford, 2010).

According to Demosthenous and Stylianides (2014, 2017), algebra-related tasks are grouped into the following three categories according to the relations between numbers and quantities in the tasks: arithmetically-situated relations, rule-based relations and known-unknown relations. Arithmetically-situated relations tasks correspond to what is referred to in the literature as generalized arithmetic (Carpenter et al., 2003; Kaput, 2008). These tasks focus on the structure of arithmetic by attending to the behavior of arithmetic operations and properties as mathematical objects and why they work. Rule-based relations tasks relate with the study of patterns, functions, change and variation (Kaput, 2008; NCTM, 2000). These tasks focus on the relations within a dataset or between datasets and can engage students in identifying relationships, extending, forming and generalizing rules. Different types of generalizations include the factual, contextual and symbolic generalization (Radford, 2003). Known-unknown relations tasks rely on the view of algebra as a cluster of modelling languages (Kaput, 2008) and the problem-solving approach on the introduction to algebra (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996). These tasks range from students' opportunities to engage with informal approaches in manipulating the increasing complexity of the relations between known and unknown quantities to those that reveal the power of symbolism in handling unknowns as known, when introduced to algebraic equations, the concept of the unknown, and equation solving.

2.2. Teachers' guidance in curriculum materials

Curriculum materials beyond providing the intended learning opportunities for students, serve also as offering to teachers an image about these learning opportunities. Curriculum materials can help teachers to understand the big mathematical ideas and to think about the development of the content across the years (Ball & Cohen, 1996; Davis & Krajcik, 2005). Materials that are designed to support teachers' learning can help teachers anticipate students' thinking and interpret their responses, support teachers' subject matter knowledge, make more visible the pedagogical intentions, inform about other teachers' approaches, and help teachers see connections between units (Ball & Cohen, 1996; Davis & Krajcik, 2005; Remillard & Bryans, 2004). It should be noted that teachers' experience, beliefs and knowledge play an important role in reading, interpreting and enacting the curriculum materials (Remillard & Bryans, 2004).

Even though these are potential forms of guidance, there are practical limitations with regard to the amount and presentation of guidance (Stylianides, 2007). It is not possible for teachers' guides to make provision for all the interactions that can build students' understanding and all the anticipated students' responses and underlying thinking (McClain, Zhao, Visnovska, & Bowen, 2009). There are also concerns that teachers who use the written guidance without adapting it to the class context or responding to unexpected answers, may lead in less effective learning (Remillard, 2000).

Stylianides (2007) examined the guidance in curriculum materials for proof tasks and categorized the tasks into those that were accompanied by only one solution or by a solution with additional guidance. Additional guidance was considered explanations about why students' engagement in proof task matters, cautious points on how to manage student approaches and discussions that supported teachers' content knowledge.

Based on the above, in this study, four components of guidance for teachers to enact the algebra-related tasks in classroom were examined. The first component was any reference to the mathematical ideas embedded in the task. The second was provision of the expected answer to the task. The third component was the approach to solve the task and the fourth was commentary of how to engage the class with the respective task.

3. Application of the analytic framework

The analytic framework was applied to analyze a textbook series. The process of analysis as well as the methodological decisions are described below in further detail.

3.1. Sample

The sample of this study consists of the curriculum materials used in the Cypriot educational content by the time this study was implemented. In the Cypriot context, teachers used a mandated mathematics textbook series that was published by the Ministry of Education and Culture and introduced gradually during the years 1998–2003. The textbook series consists of the students' textbooks and the teachers' guides for each grade. The particularity of this educational context lies on the fact that all state schools used the textbook series, which was also a unique resource, as no other textbook series was provided by the Ministry to be used by students and teachers in schools. Due to the uniqueness of the textbook series and the limited guidelines in the curriculum document, Cypriot primary teachers depend heavily on textbooks when planning and implementing their lessons (Kyriakides, 1996; Petrou, 2009). Since all teachers work according to the same guidelines, it was meaningful to explore the guidance available to enact the algebra-related opportunities in these curriculum materials.

The student textbook volumes were accessed online from the Ministry of Education and Culture website, while hard copies of the teachers' guides were bought from the Ministry's book warehouse. The sample consisted of 12 volumes of students' textbooks for grades 4 to 6 (four per grade), and three teachers' guides (one per grade).

3.2. Process of analysis

The textbook task was the unit of analysis as it served as a systematic point of reference (e.g. Stylianides, 2007) and the sample consisted of 2,814 tasks. According to Stylianides (2009), a task for the purposes of textbook analysis can refer to "any exercise, problem, activity, or parts thereof that have a separate marker in the students' textbook" (p. 270). As a separate marker, the second level of numbering was used to ensure that there was greater consistency across textbooks, and non-numbered sub segments that were clearly identified in the same way as those on other pages were assigned an external numbering.

Each task in the student textbook was examined to decide whether it matched any of the three kinds of algebra-related tasks, as mentioned above. Drawing on Stylianides' (2009) methodological approach, all the tasks were solved in the same order as they were presented in textbooks. The solving approaches were based on the knowledge of what came earlier in the curriculum to decide about students' expected prior experiences relevant to the task in order to make inferences about what the students were expected to engage with. Also, the available guidance in the teachers' guides was taken into consideration. Based on this, it was possible to decide whether the task could be considered an arithmetically-situated relations tasks, a rule-based relations task or a known-unknown relations task. If the task belonged to one of these kinds of tasks, then it was considered as an algebra-related task.

For each algebra-related task, the respective guidance in the teachers' guides was explored. Along with the first component, the guide was read to identify whether it provided any information about the mathematical ideas embedded in the task by looking at the learning objective of the lesson and specific reference to the task. It was not necessary for the guidance to refer explicitly to algebra in order to consider that there was information about the mathematical ideas embedded in the task. Regarding the second component, it was explored whether the guide provided the correct answer(s) to the task and even whether any anticipated incorrect student answers were included. Based on the third component, it was investigated whether any approaches for solving the task were suggested. Particularly, emphasis was placed to examine if only one approach, or more approaches, or even students' incorrect approaches were mentioned. This decision aimed to make transparent the different levels of guidance considering that algebra has traditionally been seen as part of secondary and higher mathematics, and thus teachers may not possess a comprehensive understanding of the anticipated early algebraic thinking. Finally, following the fourth component, any commentary about how to engage the class with the identified algebra-related tasks was explored such as teachers' questions, images of classroom interaction, and how to organize the students.

The inter-rater agreement was tested by comparing the codes of the first coder with those of a second rater. The second rater coded a subsample of tasks that consisted of three out of the 12 textbook volumes (one volume from each grade). The reliability value related to decisions about whether or not a task in the subsample was algebra-related and the inter-rater agreement was kappa=0.82.

4. Type of guidance and selected cases of tasks

The analysis identified 250 algebra-related tasks out of a total of 2,814 tasks (8.9%) in the textbook volumes for the fourth, fifth and sixth grades. The identification of the algebra-related tasks was based on the definitions of the three kinds of tasks as described above; however, the textbook authors might have had a different definition in mind that could lead to different results. The findings are shown in Table 1 and indicate that information about the mathematical ideas was provided for 86.4% of the algebra-related tasks and the correct answer for 68.8%. The teachers' guides suggested one approach for solving the task for 44% of the algebra-related tasks while for 1.6% of the algebra-related tasks there was guidance for more than one correct approach. Commentary about how to engage the class was found for 15.2% of the algebra-related tasks.

A synthesis of the findings suggests different types of guidance for algebra-related tasks. A more elaborated guidance is regarded when the teachers' guide informed the reader about the mathematical ideas of the task, the correct answer(s), the approaches in solving the task and commented on how to engage the class. This type of guidance was provided for 1.6% of the algebra-related tasks. For 11.6% of the tasks, the guides referred to all the components of guidance under study but provided only one approach for solving the task. A less expanded type of guidance was found for 38% of the algebra-related tasks as the teachers' guide referred to the mathematical ideas, to one suggested approach and to the correct answer(s). A thinner type of guidance that contained information about the mathematical ideas and the correct answer, which was also the most common one in the textbook series analyzed, applied to 68% of the algebra-related tasks.

Table 1
Percentage frequency distribution of guidance in teachers' guides

Components of guidance	**Algebra-related tasks**
Mathematical ideas	86.4
Correct answer(s)	68.8
Suggested approaches	
- One suggested approach	44.0
- More than one suggested approach	1.6
Class engagement	15.2
Types of Guidance	
Mathematical ideas + Correct answer(s) + More than one suggested approach + Class engagement	1.6
Mathematical ideas + Correct answer(s) + One suggested approach + Class engagement	11.6
Mathematical ideas + Correct answer(s) + One suggested approach	38.0
Mathematical ideas + Correct answer(s)	68.0

The results suggest that only a small percentage of the algebra-related tasks were accompanied by the more elaborated type of guidance. Even though limited guidance could raise concerns about how these tasks might be enacted in classroom, it is impossible for all tasks to be accompanied by elaborated guidance. We thus look closer to the tasks to explore how the components of guidance under study appear in the teachers' guides, to discuss what these different types of guidance might mean and what a more elaborated guidance might be.

The task in Figure 1 is from Grade 4 and was categorized as a known-unknown relations task because students were expected to engage in handling non-direct relations between known (number of animals and number of feet) and unknown (number of chicken and number of rabbits) quantities. It is a story problem that cannot be solved with straightforward arithmetical calculations and therefore students need to find other problem-solving strategies, until they will be able to use symbolism to represent and manipulate unknown quantities.

Students' textbook

Theodoros counted the chickens and the rabbits in his farm. He found that all animals were 18. He then counted their feet and found 50. How many chickens and how many rabbits are in Theodoros' farm?

(MEC, Grade 4 Volume B, 1998, p. 125)

Teachers' guide

Learning objective of the lesson: Students would be able to solve problems using different strategies.

Information about the task: The problem could be solved by drawing or using a table. For example, the problem mentions that the chickens and rabbits are 18. Students could draw 18 circles to represent the body of the animals. The teacher could ask students to think whether it is possible for all the animals to be chickens and how they could draw them. How many feet in total? It is anticipated that the students would answer that the feet would have been 36. Afterwards, students are asked to re-read the problem in order to realize that the 36 feet need to be 50. So, they add 2 feet in some animals until they become 50.

Another way is to form a table, similar to the one below:

No. Attempts	Animals	Chickens	Rabbits	Feet
1	18	9	9	(9×2)+(9×4)=18+36=54
2	18	10	8	(10×2)+(8×4)=20+32=52
3	18	11	7	(11×2)+(7×4)=22+28=50

Solution: Chickens are 11 and rabbits are 7.

(MEC, Teachers' Book, 1998, p. 91)

Figure 1. Chickens and rabbits task.

It is one of the tasks with more elaborated guidance. The teachers' guide informs about the mathematical ideas embedded in the task, which is in fact developing a mathematical competency that of problem-solving, without any reference to algebra. The correct answer is also provided as well as two approaches for solving the task: (1) drawing the animals, and (2) creating a table. The first approach involves drawing the body of 18 animals, drawing two feet in each animal and then adding two more feet to some animals until the total number of feet is 50. The description of this approach presents questions that the teacher could ask in the classroom, which encourage students to understand the relationship between quantities. Even though it is not a quite elaborate description of how the class could be engaged with the task, it gives an image to the teacher of how it could unfold in the classroom.

The second approach relies on creating a table and attempting to find what might be the number of chickens and rabbits in order to sum up to 18 and calculating the number of feet for these attempts. This approach reminds the guess-and-check strategy. The table shows that in the first attempt, the number of chickens and rabbits is equal. However, the number of feet in total is 54, which is more than 50. Hence, in the second attempt, the number of rabbits (which have double the feet of chickens) is reduced by one and the number of chickens increased by one. It can be seen that the attempts to guess the number of animals are made strategically based on the outcome of previous attempts.

Given that two approaches are suggested to solve the task, teachers create a more comprehensive understanding of this task regarding its enactment in the classroom. Students may solve the task using one of these approaches or the teacher may encourage students to use and compare different approaches. Suggesting only one approach may restrict teachers, who lack the capacity, in discussing different solution approaches and elevating the learning potential of the task. The task below is a story problem with the same structure as the problem in Figure 1. As seen in Figure 2, the teachers' guide suggests solving it only with the guess-and-check strategy.

Students' textbook
215 people attended the concert that was taking place at Lakatamia's theatre. The adults ticket costs 4 euro and the child ticket 1.50 euro. The total amount received was 560 euro. How many adults and how many children attended the concert?
(MEC, Grade 5, Volume B, 1999, p. 57)

Teachers' guide
Learning objective of the lesson: Students would be able to solve problems that involve addition and subtraction of decimal numbers.
Information about the task: Story problem to be solved with the "guess-and-check" strategy.
Solution: 95 adults and 120 children.
(MEC, Teachers' Book, 2002, p. 77)

Figure 2. Theatre task.

The fact that these curriculum materials are the only formal resource available for teachers seems to enhance their authority in planning and enacting mathematics lessons. Since there is no other textbook presentation or formal resource for guidance to provide ground for comparison, the current materials may create an impression (perhaps inadvertently) that there are no other possible or appropriate approaches for implementing the tasks beyond the one suggested. This is the case in the Cypriot context and might be the case also in other small scale and centralized educational systems.

Nonetheless, it is impossible to provide elaborated guidance and multiple approaches for solving each task in the textbook. One way of responding to the dilemma regarding the amount of guidance is indicating to teachers where elaborated guidance for similar tasks can be found in previous pages in the teachers' guides. One could argue that the teachers' guides provided elaborated guidance for the task shown in Figure 1 and hence it was not needed to repeat it for Figure 2. But this argument would not apply for this case, since the two tasks were drawn from different grades. Another way is to present discussions of selected issues separately in the teachers' guides. It is also possible that certain tasks serve different purposes in different lessons. Hence, more clarity would be needed about the purpose of the task, for example if the task serves to practice a specific problem-solving strategy, compare different strategies, link informal approaches with more formal algebraic approaches.

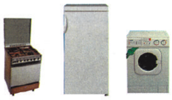
In the tasks in Figure 1 and Figure 2, there was no explicit reference to algebra. It is likely that the authors did not have the intention to exploit the potential of these tasks for students' preparation to algebra. Indeed, the guess-and-check approach does not encourage students to manipulate the quantities in ways they typically encounter in similar problems when using formal algebraic methods. Alternative approaches are to 'check a convenient trial value' to get a sense of the relations hidden in the story problem, and 'denote the as-yet-unknown' by either manipulating the unknown or leaving it unmodified (Mason, Graham, & Johnston-Wilder, 2005). Cai (2004) also described an approach in the Chinese curriculum that relied on identifying the advantages and limitations of different solution strategies and making links between the informal and formal problem-solving strategies. In these ways, students' engagement lays the ground for algebraic problem-solving. If curriculum developers aim to prepare students for algebra, the learning potential of such opportunities could be enhanced and linked with future problem-solving approaches.

For example, the approach 'denote the as-yet-unknown' would have been more purposeful since they could represent the relations between the quantities in an informal way that links the known with the unknown quantities, e.g. Chicken + Rabbits = 18, 2 × Chickens + 4 × Rabbits = 36 and then trying numbers for chickens and rabbits. This approach sets the ground for students' work with formal algebraic problem-solving and provides more coherence in students' learning opportunities with similar opportunities in Grade 4 as seen in Figure 3. As seen in the suggested approach in the teachers' guide, students are expected to denote the unknowns. The task in Figure 3 asks students to find the price for each electrical appliance and the teachers' guide suggests representing the relations in an equation format. Then, by comparing the first two relations, they can find the price of the washing machine and then the price of the other electrical appliances. In this task, there is no suggestion to solve the task by guessing values for each electrical appliance and checking whether the guessed values fulfill the given relations between the known and unknown quantities.

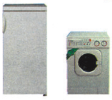
Students' textbook

Read the information provided to find the price of each electrical appliance.

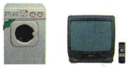
The cooker and the fridge cost 1320 euro.



The cooker, the fridge and the washing machine cost 1800 euro.



The fridge and the washing machine cost 1270.



The washing machine and the television cost 770.

(MEC, Grade 4 Volume C, 1998, p. 63)

Teachers' guide

Learning objective of the lesson: Students would be able to solve problems using different strategies.

Information about the task: It is recommended that students have either cards with the photos of the fridge, washing machine etc. similar those in the book, either cards with the following: cooker, television, fridge, washing machine, 1320, 1800, 1270, 770.

Students could place the cards in the same way as in their textbooks and find the relationships between the electrical appliances.

cooker + fridge = 1320
cooker + fridge + washing machine = 1800
1220 + washing machine = 1800, washing machine = 480
fridge + washing machine = 1270
fridge + 480 = 1270, fridge = 790
washing machine + television = 770
480 + television = 770, television = 290

(The teachers' guide also recommends solving a similar problem to the above).

(MEC, Teachers' Book, 1998, pp. 111-112)

Figure 3. Electrical appliances task.

As mentioned before, the teachers' guides provided information about the mathematical ideas, the correct answer and one suggested approach to solve the task for 37% of the algebra-related tasks. This level of guidance was provided for an arithmetically-situated relations task shown in Figure 4. The task examines the addition and subtraction of odd and even numbers. The guide mentions that students are expected to investigate the general form of these numbers and relates with the objective of the lesson about the notion of the variable. There is no information about how to engage the class with this task, but the guide suggests to solve the task by giving examples of specific numbers. On the one hand, this could be interpreted as a strategy to help students to deal with the concrete before engaging with the abstract nature of the expressions. On the other hand, this also conveys the idea that to generalize the relation between odd and even numbers, all that is needed is to check a few specific numbers. If the second interpretation applies, then the guidance encourages teachers and students to develop empirical arguments, which illustrates inattention on the part of the textbook authors to the guidance provided. Investing on mathematically appropriate approaches is an issue worth being considered by the curriculum developers.

Students' textbook

Complete the tables with the words 'odd' or 'even' to discover the rules for the number operations.

If $\lambda > \mu$

λ	μ	$\lambda + \mu$		λ	μ	$\lambda - \mu$
odd	odd	even		odd	odd	
odd	even			odd	even	
even	even			even	even	
even	odd			even	odd	

(MEC, Grade 6 Volume C, 2000, p. 51)

Teachers' guide

Learning objective of the lesson: Students are expected to use algebraic expressions to represent the relations between numbers and to understand the notion of variable.

Information about the task: Investigation of numbers in general form: odd/number/even number (Requested to give examples of specific numbers).

Solution: odd+even=odd, even+odd=odd, odd+odd=even, odd-even=odd, even-even=even, even+odd=odd.

(MEC, Teachers' Book Volume B, 2003, p. 62)

Figure 4. Odd and even numbers task.

The next task in Figure 5 is a growing pattern task for which the guide provided similar guidance to the task in Figure 4 and it raises interesting issues regarding the information about the mathematical ideas, the correct answer and the suggested approach for solving it. It is a rule-based relations task and provides the graphical representation, a table with the number of cubes and the area of the outer surface for the first six terms. The second question asks students to find the area of 20 cubes glued together as shown below.

According to the answer in the teachers' guide, students are expected to find a general rule in order to be able to find the area based on the number of cubes. This expectation is not stated explicitly but it seems to be indicated by the way the solution to the second question is presented [i.e. (number of cubes × 4) + 2 = 82]. The task also asks students to justify their answer but again a relevant response is not provided in the guide, but the justification is implicitly seen in the equation given (i.e. four sides for each of the cubes plus the additional two sides of the first and the last cube in the row). However, it is not known whether teachers would make similar inferences. The level of explicitness in the presentation of teachers' guides is likely to influence teachers' interpretations and understanding about the expectations of the task.

Students' textbook

1. Complete the table.

Number of cubes	1	2	3	4	5	6
Area of the outer surface	6	10				

2. What is the area of the outer surface of 20 cubes stuck together in a row? Justify your answer.

(MEC, Grade 5, Volume D, 1999, p. 43)

Teachers' guide

Learning objective of the lesson: Students would learn to find the area of the outer surface of cuboids and solve problems that involve the relationship between area and volume.

Information about the task: Relationship between the volume and the area of the outer surface of a cuboid.

Solution (Question 2): (number of cubes × 4) + 2 = 82 square centimeters.

(MEC, Teachers' Book, 2002, p. 148)

Figure 5. Growing pattern task.

The teachers' guide could have mentioned that students were expected to investigate how the pattern grows by looking at the structure of the given figures, and even explain that the task was asking for the number of cubes in the 20th figure so that students identify and generalize a functional relation between the number of cubes and the area of the outer surface. However, in the teachers' guide the information about the mathematical ideas mentioned that the task involved the relationship between the volume and the area of the outer surface and did not refer to the most prevailing processes embedded in the task, that of identifying the structure of co-varying quantities or even generalizing. As seen in the learning objectives, the task was part of a lesson that studied the relationship between the area and the volume. Indeed, these concepts are involved in the task, but these are not at the essence of solving the task. Also, the relationship between the area and the volume in this task applies only for the specific construction of cubes. It is a task in the context of area and volume but engages students in attending to the structure of consecutive figures and finding a rule that links the number of cubes with the area of the outer surface of the figure. The issue raised here is how the tasks are selected to design a lesson in the student textbook. In the design of this textbook series, the textbook authors presented the mathematical topics in an interrelated manner focusing on number operations and properties while topics such as geometry, measurement, probability, and statistics develop simultaneously and are not contained within separate lessons (Petrou, 2009). However, such presentation is more likely to make it difficult for teachers to track the development of mathematical topics across years or perceive how tasks serve the goals of primary mathematics. If curriculum materials are supposed to also educate teachers, then they need to help teachers understand the development of content and consider the tasks in the context of the larger curricular picture (Ball & Cohen, 1996). It is purposeful for teachers to know the main ideas and foci of the lesson and the rationale behind the selection of tasks and how these are linked together. Another option in the design of lessons would be to have separate lessons for different topics, i.e. a whole lesson on growing patterns.

Furthermore, the issue discussed above regarding the approaches for solving the task is again raised for the growing pattern task. The teachers' guide shows only one way for reaching the answer but there are various ways that students could find the 20th figure. For example: (a) by multiplying 18 cubes times four sides and adding 2 cubes times five sides; (b) by multiplying 20 cubes times six sides and subtracting 18 cubes times 2 sides and then subtracting two more sides from the first and the last cube. Different perspectives are derived from attending to which elements remain constant and which elements change in a predictable and consistent manner (Andrews, 2002). The guidance about the class engagement could have mentioned important questions such as 'which elements change and which ones remain the same?'. The use of sign drawings, sign digits, as well as speech and gestures are also means for constructing meaning in mathematical generalizing processes, which are referred by Radford (2003) as the semiotic means of objectification and lead to differences in types of generalization.

The tasks discussed above could neither have been considered straightforward nor trivial and providing guidance for teachers is more meaningful for such tasks. An explanation that may apply for the 68% of algebra-related tasks, which were not accompanied by a suggested approach or guidance about the class engagement, is that these were routine tasks or tasks for which the approach was straightforward and hence an elaborated form of guidance would not have had an additive role. For example, the task in Figure 6 below is an arithmetically-situated relations task, in which students engage with the symbolic and verbal generalization of the multiplicative identity property. It belongs to the tasks for which a thinner type of guidance was provided with information about the mathematical ideas and the correct answer only. The presentation of the task does not provide context for much elaboration. Hence, both the design and demand of the task as well as what have preceded the task might determine the need of guidance that would be meaningful for teachers to enact the task in classroom.

Students' textbook
Find the products and write your comments.

$86 \cdot 1 =$	$\kappa \cdot 1 =$	Comments: ______________________
$754 \cdot 1 =$	$\lambda \cdot 1 =$	________________________________
$1 \cdot 46{,}3 =$	$1 \cdot \mu =$	________________________________
$1 \cdot 626{,}43 =$	$1 \cdot \nu =$	

(MEC, Grade 6 Volume C, 2000, p. 57)

Teachers' guide
Learning objective of the lesson: Students would recognize the identity property of addition and multiplication.
Information about the task: Investigation of the multiplicative identity property using numbers and symbols.
Solution: The product of any number with one is equal to the number.
(MEC, Teachers' Book Volume B, 2003, pp. 70-71)

Figure 6. Identity property task.

The findings also showed that this textbook series did not provide any guidance about possible incorrect student approaches and answers. One reason maybe that this was not an intended approach by the textbook authors while another reason maybe that the literature was not so comprehensive at the time these textbooks were published. However, since nowadays the field has developed substantial knowledge about students' difficulties with algebra-related topics, it would be educative for teachers to access relevant findings in the teachers' guides. For example, regarding the growing pattern task in Figure 5, among students' generalization strategies are the recursive strategy and the whole-object strategy (Lannin, 2005). Students who employ the recursive strategy build on the previous terms to find the next term. These students would have attempted to find the area for the 7^{th} up to the 19^{th} figure, in order to be able to find the 20^{th} figure. Another strategy is the whole-object that could lead to incorrect solutions. Students use a unit and multiply it to find a larger unit. For example, students could have argued that since for two cubes the area is 10 square centimeters, then for 20 cubes the area would have been 200 square centimeters.

The analysis of teachers' guides showed variation in the amount of guidance and in the treatment of the components of guidance under study. Teachers do not seem to have comprehensive guidance in a systematic way for the implementation of algebra-related tasks in classroom. Considering that algebra is a topic that has gained increasing emphasis in primary mathematics, curriculum developers would need to reconsider what might be the nature of the guidelines that could help teachers enhance students' engagement with relevant learning opportunities. Curriculum materials have the potential to offer opportunities for teachers' learning (e.g. Collopy, 2003), which is particularly important for algebra-related tasks since they have not been traditionally considered part of primary school mathematics.

5. Conclusions

This paper presented an analytic framework for examining the guidance in teachers' guide to enact algebra-related tasks and discussed the findings from applying the framework to analyze the textbook series used in the Cypriot educational context. The findings provided the context to discuss aspects of the guidance that seem necessary and meaningful for teachers. In this way, the paper contributes in beginning the discussion of how the necessary guidance for teachers to implement algebra-related tasks might look like and in developing understanding towards this direction. The elements of guidance and the issues discussed above could also inform the designers of curriculum materials. Three main issues were revealed in the presentation and discussion of the selected cases of tasks.

One of the issues was the amount of guidance, which has also been raised in other studies (e.g. Davis & Krajcik, 2005; Stylianides, 2007). The textbook series did not provide systematically comprehensive guidance for teachers. It could have been supportive, at least to beginning teachers, if the teachers' guide provided all the components of guidance under study – reference to the mathematical ideas, the correct answer(s), approaches to solve the task, and commentary about the class engagement. But this would be an unmanageable and impractical approach both for curriculum developers and for teachers. As mentioned above, the amount of guidance that would be meaningful for teachers seems to depend on the nature of the task, on what have preceded the task and on how the teachers' guide is organized. It should not be overlooked that most teachers might not have the time to read extensive guides and also prescriptive guidance that ignores teachers' autonomy may result in less effective curriculum materials (Davis & Krajcik, 2005).

A second issue is the level of explicitness in the presentation of the aspects that form the guidance. Beyond the tasks for which no information was given about the mathematical ideas, the expectations of algebra-related tasks were not presented in a clear-cut manner. It is critical for teachers to be aware of the mathematical ideas embedded in the tasks, which is considered more important than guiding their actions (Remillard, 2000). Given the fact that algebra has traditionally been considered a mathematical topic for secondary school, there is a danger that the potential of these tasks to engage students with early algebraic ideas will not be fulfilled. Teachers' approaches to tasks are underlain by the different ways they read the textbooks, which in turn are influenced by their beliefs about teaching and their expectations of students' learning (Remillard, 1999). Therefore, by not providing explicit information about the role of these tasks, textbooks allow further space for disparate interpretations among teachers and thus more variability in the opportunities that teachers offer to students to engage with algebra-related topics. This is particularly important considering the findings that primary teachers have rather narrow conceptions about algebra-related tasks and a rather limited understanding of the learning potentials of these tasks (Chick & Harris, 2007; Stephens, 2008). Hence, concerns are raised regarding the implementation of algebra-related tasks in primary school classrooms.

A third issue is the selection of approaches. The opportunities for students to engage with algebra-related tasks should be presented in developing progressive steps towards students' preparation for algebra, if this is an intended goal by the textbook authors. Also, the approaches for solving a task suggested in the guides need to be mathematically appropriate. The provision of presenting different possible students' approaches expands teachers' repertoire and knowledge base. This is likely to enhance the classroom discourse as teachers may be more prepared to adapt flexibly to students' answers. The teachers' guide could contribute towards supporting teachers, but it should not be seen as an authoritative resource or even a universal remedy. The written guidance is only one approach to provide support that should not be over-estimated, and it should not be expected that all teachers have to follow the guidance. A teachers' guide should be written in a way that considers teachers' agency and the need for teachers to make decisions and adaptations.

Further research is needed to explore how teachers interpret the available guidance and how they enact the algebra-related tasks in the classroom. The field needs more studies on what type, amount and form of guidance is rather optimal for teachers to provide sense-making opportunities that prepare students for algebra. Based on the findings of this study, it is of interest to explore further the guidance for different tasks according to their cognitive demand and their place in the curriculum materials. More understanding could then be developed about how the written guidance influences the classroom practices and what kind of presentation format would be meaningful and practical for teachers.

Acknowledgments

The paper is based in part on the first author's doctoral dissertation, which was completed at the University of Cambridge under the supervision of the second author (University of Cambridge) as the primary supervisor and also Paul Andrews (Stockholm University).

References

Andrews, P. (2002). *Linking cubes and the learning of mathematics.* Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What is—or might be—the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Researcher, 25*(9), 6–8+14.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching.* (Eds.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. Jonsen, M. J. Høines, & A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Norway.

Cai, J. (2004). Developing algebraic thinking in the earlier grades: A case study of the Chinese elementary school curriculum. *The Mathematics Education, 8*(1), 107–130.

Cai, J., & Cirillo, M. (2014). What do we know about reasoning and proving? Opportunities and missing opportunities from curriculum analyses. *International Journal of Educational Research, 64*, 132–140.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C, Ng, S. F., & Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades: A cross-cultural comparative perspective, *ZDM, 37*(1), 5–15.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Berman, P. W., & Pligge, M. (2005). Developing algebraic reasoning in the elementary school. In T. A. Romberg, T. P. Carpenter, & F. Dremock (Eds.), *Understanding mathematics and science matters* (pp. 81–98). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87–115.

Chick, H. L., & Harris, K. (2007). Grade 5/6 teachers' perceptions of algebra in the primary school curriculum. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121–128). Seoul, Korea.

Collopy, R. (2003). Curriculum materials as a professional development tool: How a mathematics textbook affected two teachers' learning. *The Elementary School*

Journal, 103(3), 287–311.

Davis, E. A., & Krajcik, J. S. (2005). Designing educative curriculum materials to promote teacher learning. *Educational Researcher, 34*(3), 3–14.

Demosthenous, E., & Stylianides, A. J. (2014). Algebra-related tasks in primary school textbooks. In C. Nicol, P. Liljedahl, S. Oesterle, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 369–376). Vancouver, Canada.

Demosthenous, E., & Stylianides, A. J. (2017). *Algebra-related topics in elementary school mathematics: Opportunities in curriculum materials.* Manuscript in preparation.

Dougherty, B. J. (2008). Measure up: A quantitative view of early algebra. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 389–412). New York: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Haggarty, L., & Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal, 28*(4), 567–590.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Kyriakides, L. (1996). Primary teachers' perceptions for curriculum reform in Cyprus with special reference to mathematics. *Mediterranean Journal of Educational Studies, 1*(2), 77–93.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231–258.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Open University, Paul Chapman and Sage Publications.

McClain, K., Zhao, Q., Visnovska, J., & Bowen, E. (2009). Understanding the role of the institutional context in the relationship between teachers and text. In J. T. Remillard, B. A. Herbel-Eisenmann, & G. M. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: Connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 56–69). New York: Routledge.

Ministry of Education and Culture. (1998). *Mathematics Textbook for Grade 4* (Vol. A, B, C, D). Nicosia: Ministry of Education and Culture.

Ministry of Education and Culture. (1999). *Mathematics Textbook for Grade 5* (Vol. A, B, C, D). Nicosia: Ministry of Education and Culture.

Ministry of Education and Culture. (2000). *Mathematics Textbook for Grade 6* (Vol. A, B, C, D). Nicosia: Ministry of Education and Culture.

Ministry of Education and Culture. (2001). *Teachers' Guide for Grade 4*. Nicosia: Ministry of Education and Culture.

Ministry of Education and Culture. (2002). *Teachers' Guide for Grade 5*. Nicosia: Ministry of Education and Culture.

Ministry of Education and Culture. (2003). *Teachers' Guide for Grade 6* (Vol. A, B). Nicosia: Ministry of Education and Culture.

Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (pp. 277–301). Heidelberg: Springer.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for school mathematics.* Reston: NCTM.

Petrou, M. (2009). *Cypriot preservice teachers' content knowledge and its relationship to their teaching* (Unpublished doctoral dissertation). University of Cambridge, UK.

Porter, A. C. (2002). Measuring the content of instruction: Uses in research and practice. *Educational Researcher, 31*(7), 3–14.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37–70.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1–19.

Remillard, J. T. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform: A framework for examining teachers' curriculum development. *Curriculum Inquiry, 29*(3), 315–342.

Remillard, J. T. (2000). Can curriculum materials support teachers' learning? Two fourth-grade teachers' use of a new mathematics text. *The Elementary School Journal, 100*(4), 331–350.

Remillard, J. T., & Bryans, M. B. (2004). Teachers' orientations toward mathematics curriculum materials: Implications for teacher learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 352–388.

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (2004). *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study.* Boston: Kluwer Academic Publishers.

Stephens, A. C. (2008). What "counts" as algebra in the eyes of preservice elementary teachers? *Journal of Mathematical Behavior, 27*(1), 33–47.

Stylianides, G. J. (2007). Investigating the guidance offered to teachers in curriculum materials: The case of proof in mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 6*(1), 191–215.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning, 11*(4), 258–288.

Stylianides, G. J. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research, 64*, 63–70.

Usiskin, Z. (1995). Why is algebra important to learn? *American Educator, 19*(1), 30–37.

Rileggere un articolo pubblicato nel 2000 con occhi del 2018: Che cosa resta, che prospettive sono state raggiunte, che traguardi sono ancora lontani?

Bruno D'Amore[1,2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

[1]*Professor titular experto, Doctorado Interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

[2]*NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia*

Abstract. *Based on the request of the director of the important Mexican journal "Educación Matemática", we analyze one of our articles published in this journal in 2000. In it we proposed hypotheses on the future development of research in mathematics education. Relying on current research, we discuss the relevance and significance of those hypotheses, formulated 18 years ago. The aim is to show how current research has evolved over the last twenty years.*

Keywords: research in mathematics education, general didactics and disciplinary didactics, semiotics, devolution, personal relation with mathematical knowledge, teacher training.

Sunto. *Basandoci sulla richiesta della direttrice dell'importante rivista messicana "Educación Matemática", analizziamo un nostro articolo apparso su questa rivista nel 2000; in esso si proponevano ipotesi sugli sviluppi futuri della ricerca in didattica della matematica. Facendo affidamento sull'attuale ricerca, si discute della pertinenza e della significatività di quelle ipotesi, formulate 18 anni fa. Lo scopo è di mostrare come si sia evoluta la ricerca attuale nell'ultimo ventennio.*

Parole chiave: ricerca in didattica della matematica, didattica generale e didattica disciplinare, semiotica, devoluzione, relazione personale con il sapere matematico, formazione docente.

Resumen. *Atendiendo la solicitud hecha por la directora da la importante revista mexicana "Educación Matemática", analizamos un artículo nuestro publicado en dicha revista en el año 2000; en dicho trabajo se hacían hipótesis acerca de los desarrollos futuros de la investigación en didáctica de la matemática. Haciendo referencia a los resultados de la actual investigación, se discute sobre la pertinencia y la significatividad de estas hipótesis, formuladas hace ya 18 años. El objetivo es el de mostrar cómo ha evolucionado la investigación en nuestro campo durante estos últimos veinte años.*

Palabras clave: investigación en didáctica de la matemática, didáctica general y didáctica disciplinar, semiótica, devolución, relación personal con el saber matemático, formación docente.

1. Premessa

La rivista *Educacion Matematica* è nata nel 1989, realizzata dalla *Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática A. C.* (SOMIDEM), esce tre volte l'anno ed è la rivista in lingua spagnola più antica del mondo. Ha un riconoscimento internazionale di grande prestigio. In questo 2018 pubblica il suo 30° volume; la sua storia viene divisa dalla direzione attuale in 2 periodi: dal 1989 al 2003 e poi dal 2004 a oggi, 2018. [Tanto per fare un paragone: la rivista italiana *La matematica e la sua didattica* è nata nel 1987, si è pubblicata fino al 2009, per 23 anni; è stata ferma per 6 anni e ha ripreso le pubblicazioni dal 2016, anno 24; in questo 2018 pubblica dunque il suo 26° volume].

Nel 1989 la didattica della matematica era appena nata, un neonato impaziente e impetuoso che aveva voglia di sostituire banalità prive di scientificità assai diffuse nel mondo della scuola che nuocevano all'apprendimento della matematica, anziché favorirlo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2014, 2015b). Si trattava di una vera e propria rivoluzione, proponendo la prima teoria che si possa ascrivere a uno studio scientifico dell'apprendimento della matematica, la *teoria delle situazioni*. La storia ci mostra come, a questa prima teoria, fecero poi seguito varie altre.

Nel 1989 molti dei celebri articoli che hanno portato il caro amico e maestro Guy Brousseau alla prima medaglia Klein nel 2003, come atto (dovuto) di riconoscenza planetaria, erano già stati pubblicati; i matematici erano affascinati dal nuovo mondo che Brousseau stava creando per noi (citiamo solo alcuni dei lavori più rilevanti pubblicati fra il 1972 e il 1989: Brousseau 1972; 1980a, b; 1982; 1984; 1986a, b, c; 1988a, b, c, d; 1989a, b; Brousseau & Brousseau, 1987; Brousseau & Pérez, 1981).

Una storia raccontata in prima persona dei primi passi di quella che poi si chiamerà *Didattica della matematica* è stata registrata da Guy Brousseau su richiesta della direzione del convegno internazionale che si è svolto a Santa Marta (Colombia) nel settembre 2015.[1] Segnaliamo anche un lavoro di Brousseau che mette in rilievo le relazioni fra la ricerca in didattica della matematica e lo sviluppo dell'epistemologia della matematica che può essere letto in chiave storico-evolutiva (Brousseau, 2008).

Un fatto che ci sconvolge, consapevoli come siamo di questa storia, sta nella superficialità colpevole e nell'ignoranza arrogante di chi ritiene di creare nuove teorie, senza ritenere necessario conoscere le precedenti, accusando le teorie iniziali, in particolare la teoria delle situazioni, di essere "teorie superate del passato"; sarebbe come se René Descartes avesse, nel creare la geometria

---

[1] Convegno Internazionale *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9–11 settembre 2015, organizzato da Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla per conto della Universidad de La Sabana, Chia, Colombia. Atti on line: http://congresodidacticamatematica.unisabana.edu.co (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015a).

analitica, disdegnato e ridicolizzato la geometria degli *Elementi* di Euclide. Che questo fatto sia più diffuso di quanto si creda e che tipo di sprezzante critica meriti è testimoniato in D’Amore e Fandiño Pinilla (2013a).

La rivista *Educación matemática* nacque dunque nel 1989, poco dopo la nascita ufficiale della didattica della matematica che in molti riconosciamo convenzionalmente nel 1986 a causa di uno dei lavori più significativi di Brousseau (1986c); e già 10–11 anni dopo le cose erano molto diverse: si dettavano corsi universitari con quel nome mentre convegni e congressi, cattedre universitarie, dottorati di ricerca, riviste specifiche del settore affollavano sempre più diffusamente il nostro mondo. E così, già nel 2000 sembrava fosse giunto il momento di trarre bilanci, complice anche il cambio di millennio: proprio nel 2000 pubblicammo su *Educación Matemática* un articolo il cui titolo è emblematico: *La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses* (D’Amore, 2000) (*La didattica della matematica al cambio di millennio: radici, vincoli e interessi*). Dunque, sembrava già necessario, nel 2000, fare il punto e profetizzare l’evoluzione futura di questi studi e di queste ricerche.

Non è stato quello il nostro unico articolo pubblicato nel cosiddetto “primo periodo” della rivista; per esempio, nel 2002 ci sembrò che si dovesse tornare a parlare con vigore e correttezza scientifica delle geniali idee lungimiranti di Brousseau perché già cominciavano movimenti di ingenui detrattori che, senza in realtà aver studiato a fondo le sue idee, le ridefinivano in termini banali e poco scientifici (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2002). Tant’è vero che Bernard Sarrazy (1995) aveva già evidenziato le storture di chi accedeva a questo nuovo mondo della didattica della matematica senza studiarne i termini specifici definiti con pazienza e lungimiranza, reintroducendoli con leggerezza e banalità, solo per sentito dire. Per esempio, in quel lavoro Sarrazy dà almeno 50 diverse accezioni distorte e banali della prima idea fondante della teoria delle situazioni, quella di contratto didattico sulla quale si stanno accentrando da anni nuovi studi analitici con rinnovato vigore (D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010; Narváez Ortiz, 2017). Sarebbe come tenere un corso universitario sui fondamenti della geometria reinventando le definizioni euclidee basandole su sentiti dire o solo sul suono delle parole.

Siamo stati invitati dalla direzione di *Educación Matemática* a prendere in esame uno dei diversi articoli da noi pubblicati fra il 1989 e il 2003; abbiamo scelto proprio quello del 2000 nel quale, ispirati forse proprio dal cambio di millennio, fatto epocale che non capita spesso, almeno dal punto di vista numerico, sembrava avere senso e attraente fare previsioni per il futuro. Non si tratta di un lavoro di ricerca (gli altri da noi pubblicati su quella rivista, prima e dopo il 2003, lo sono tutti, in verità), ma ci sembra che questa scelta sia perfettamente in linea con le nuove prospettive che si vedevano sorgere in quegli anni. Dunque, ci sembra che il tema trattato in quel 2000 sia perfettamente adeguato a questa ricorrenza, 30 anni di vita della rivista.

2. Contesto accademico, concettuale, sociale nel quale si sviluppò il contenuto che si descrive nell'articolo scelto

Il contesto dell'articolo è descritto brevemente nel suo:

> Sunto. *Questo articolo è idealmente diviso in due parti. Nella prima si tenta una strutturazione teorica della didattica della matematica all'interno di un panorama assai più vasto (radici) che va dalle altre didattiche disciplinari, alla didattica generale, alla pedagogia (collegamenti). Nella seconda si ipotizzano scenari di possibili sviluppi nella ricerca futura (interessi).* (D'Amore, 2000, p. 39)

Dividiamo dunque la presentazione dei contenuti dell'articolo in due parti, così come si annuncia nel sunto.

Prima parte

Uno dei dibattiti dell'epoca riguardava, più nel campo pedagogico che in quello matematico, le relazioni tutte da definire fra le didattiche disciplinari e la didattica generale. Fra le didattiche disciplinari, in quell'epoca erano soprattutto vigorosi lo studio e la ricerca in didattica della matematica; altre discipline muovevano i primi passi, altre dovevano ancora nascere (alcune non sono mai nate, confuse come sono ancora oggi fra il buon senso, la disciplina stessa, la divulgazione della disciplina e la pedagogia). Ma la didattica generale era assai viva da diversi anni, come disciplina autonoma, liberatasi da quello che alcuni pedagogisti, passati alla didattica generale, chiamavano "il giogo della pedagogia". Alcuni studi teorici su questi legami erano già stati compiuti (D'Amore & Frabboni, 1996), altri seguirono di lì a pochi anni (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; D'Amore & Frabboni, 2005).

In questa prima parte, dunque, si proponeva una storia del processo: dalla filosofia, alla pedagogia, alla didattica generale, citando filosofi, pedagogisti, sociologi e didatti generali, discutendo sugli aspetti descrittivi e normativi (per esempio, il principio generale dell'educazione: metodi e finalità) che hanno accompagnato, all'interno della pedagogia, il processo di creazione della didattica generale. E mettendo in evidenza le differenze fra pedagogia, scienza dell'educazione, scienza della formazione, didattica generale. Fra gli autori moderni citati: Émile Durkheim (1922/1968), Jean Brun (1981, 1996), Gaston Mialaret (1982), Maria Luisa Schubauer Leoni (1996), François Conne (1996); si noti che i primi sono pedagogisti o psicologi, mentre questi due ultimi sono già studiosi militanti nel campo della didattica della matematica, costretti comunque ancora a fare i conti con la didattica generale, le scienze dell'educazione, le didattiche disciplinari, l'epistemologia genetica. Il dibattito continuo riguardava il sapere, la sua natura.

Ci pare qui doveroso fare un inciso.

Furono, quelli fra il 1970 e il 1990, anni in cui si cominciò a parlare di scienza del … o della …, a proposito di discipline che, fino a pochi anni prima, mai avrebbero aspirato a tale denominazione. Diciamo che, nel mondo delle scienze, dopo le “dure”, a seguito di alcuni anni di dibattito, si cominciavano ad accettare scienze più “deboli”. Cerchiamo di spiegare brevemente questo percorso, ricorrendo principalmente a D’Amore (2007).

Il termine *teoria scientifica* o *scienza* è generalmente riservato a ogni rappresentazione (simbolica, astratta, scritta, …) condivisa, coerente, comunicabile e plausibile, di un insieme di fenomeni tra loro correlati da relazioni causali, descrivibili, significative (causa-effetto, deduzione, induzione, …).

Tralasciando per brevità il percorso arcaico dell’idea di scienza, nei modi attuali di considerare una teoria scientifica si trova la nozione di *paradigma* di Thomas Kuhn (1957); si intende con *paradigma* l’insieme delle ipotesi teoriche generali e l’insieme delle leggi per le loro applicazioni, comunemente accettate dagli appartenenti a una stessa comunità scientifica, e implicanti un sostanziale accordo nei giudizi professionali, di merito e di pertinenza. Nella formazione di una nuova comunità scientifica, c’è un momento a partire dal quale si può parlare appunto di “paradigma”; la fase che precede è caratterizzata da una disorganizzazione, assenza di accordi specifici, e con una costante richiesta di dibattito sui fondamenti della disciplina stessa: si può dire che in questa fase vi sono tante teorie quanti ricercatori e una continua richiesta ed esigenza di chiarire i punti di vista propri e altrui. I lavori scritti di ricerca nel campo sono spesso accompagnati da spiegazioni sui caratteri generali della ricerca stessa. La tesi di Kuhn (1957) più famosa è quella secondo la quale il progresso scientifico procede secondo “rivoluzioni”, dato che si ha passaggio, evoluzione, solo dopo una crisi.

Un altro contributo fondamentale è quello proposto negli anni ’60 da Imre Lakatos (Lakatos & Musgrave, 1960), con l’idea di *programma di ricerca*, cioè una successione di teorie scientifiche collegate tra loro in uno sviluppo continuo, contenenti regole metodologiche di ricerca (sia in positivo, da seguire, sia in negativo, da evitare). Ogni programma deve contenere: un nucleo o centro del programma; un sistema di ipotesi ausiliarie; un’euristica, cioè i procedimenti che si applicano alla risoluzione dei problemi. In questa successione, una nuova teoria si può allora considerare un progresso rispetto a una precedente se: fa predizioni che la precedente non era in grado di fare; alcune di tali predizioni si possono provare come vere; la nuova teoria spiega fatti che la precedente non poteva provare.

Un altro notevole contributo teorico è quello dovuto a Mario Bunge, negli anni ’80 (Bunge, 1985): la scienza è un corpo in costante accrescimento di conoscenze, caratterizzato dal fatto di trattare di conoscenze razionali, sistematiche, esattamente descrivibili, verificabili (e dunque anche fallibili). La conoscenza scientifica coincide con l’insieme delle idee su un certo argomento, stabilite in modo momentaneamente provvisorio; ma poi, il concorso dei singoli e lo scambio di informazioni e di idee dà luogo a una comunità scientifica. Quel che caratterizza la differenza tra campi di credenza (religioni, ideologie, politiche, ...) e campi di ricerca scientifica è il tipo di modalità secondo le quali avvengono i "cambi" nelle idee; nei primi, i cambi avvengono a causa di "rivelazioni", controversie, pressioni sociali; nei secondi c'è un cambio continuo a causa dei risultati della ricerca stessa.

Secondo richieste più "deboli", una teoria scientifica si definisce oggi tale quando dispone di un oggetto specifico di studio, di un suo proprio metodo di ricerca e di un suo specifico linguaggio condiviso; a questa richiesta fanno spesso riferimento i teorici delle scienze umane, per chiamare "scienze" appunto, tali domini di studio. Questa richiesta "debole" ha fatto proliferare negli ultimi anni l'appellativo di "scienze" dato a molte discipline. Infatti, qualsiasi disciplina allo sviluppo della quale concorrano studiosi che si riconoscano e si accettino reciprocamente come esperti in essa, fondando una comunità di pratiche condivise, che facciano uso dello stesso linguaggio, prima o poi acquisisce proprio le caratteristiche appena descritte. Il problema della ripetibilità e riproducibilità degli esperimenti, della corretta definizione delle variabili in gioco, del senso che acquistano termini come "rigoroso", "vero" ecc., pur mantenendosi, tende a subire profonde modifiche.

Quel che c'è di comune in tutte queste interpretazioni è che le teorie scientifiche non possono essere creazioni o invenzioni di un singolo, ma deve esserci una comunità di persone tra le quali vige un sostanziale accordo sia sui problemi significativi della ricerca, sia sulle modalità nelle quali essa si esplica, sia sul linguaggio usato. In questa direzione, Thomas Romberg, alla fine degli anni '80 (Romberg, 1988), per definire le caratteristiche peculiari di una teoria scientifica consolidata e stabile, affermava che:

- deve esistere un insieme di ricercatori che dimostrino interessi in comune; in altre parole ci devono essere problematiche centrali che guidano il lavoro dei ricercatori e che siano ampiamente condivise;
- le spiegazioni date dai ricercatori devono essere di tipo causale;
- il gruppo dei ricercatori deve aver elaborato un vocabolario e una sintassi comune, sui quali il gruppo è d'accordo;
- il gruppo deve aver elaborato procedimenti propri per accettare o refutare gli enunciati in un modo considerato da tutti oggettivo e largamente condivisibile.

Tra le scienze così intese, ben rientrano le didattiche disciplinari; è sotto gli occhi di tutti l'esistenza di un folto gruppo internazionale di ricercatori nelle varie didattiche disciplinari che hanno interessi comuni, per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise, che danno (da alcuni decenni) spiegazioni di carattere causale, che hanno elaborato un vocabolario comune, condiviso; essi hanno convegni specifici e riviste specifiche, all'interno dei quali le proposte di comunicazione o di pubblicazione vengono vagliate in base a procedimenti ampiamente condivisi (D'Amore, 2001a). Siamo dunque in pieno nelle condizioni proposte da Romberg per poter affermare che molte didattiche disciplinari hanno tutte le caratteristiche per poter essere considerate scienze consolidate e stabili.

Torniamo all’articolo del 2000 che stiamo esaminando. Solo per chiarire che il dibattito non era tutto di quegli anni, ma che aveva una notevole storia secolare, mostrammo che la base dello studio delle problematiche di base della didattica delle scienze (compresa la matematica) certamente è già presente nella *Encyclopédie* di Gianbattista Le Rond d’Alembert e Denis Diderot, dunque nella II metà del XVIII secolo, soprattutto negli articoli: Analisi, Sintesi, Metodo, Elementi di scienze. Si tratta, a nostro avviso, di uno studio già specifico di didattica, che si differenzia dagli interessi generali della pedagogia, proponendo problemi sull’apprendimento della scienza da parte di giovani allievi. In un certo senso è già un atteggiamento ascrivibile alla didattica disciplinare.

A nostro avviso si stava già configurando la futura distinzione fra:

- la disciplina in sé così com’è conosciuta e praticata dagli specialisti, dagli accademici;
- la didattica generale in sé, con le sue asserzioni generali credibili e garantite da riflessioni significative condotte da esperti del settore;
- la didattica disciplinare in sé, che ha diversi e propri specifici parametri, paradigmi e obbiettivi.

Seguiva poi un’analisi storica ed epistemologica che non riportiamo qui, ma che permette di giungere a un’altra proposta analoga, ma più dettagliata, fra contenuti:

- i contenuti della disciplina d, stabiliti dalla sua stessa evoluzione, dall’accademia, a partire dalla sua storia;
- i contenuti della didattica di quella disciplina, D_d, che ha come obiettivo di studio la sistemazione teorica (nell’ottica di insegnamento/apprendimento efficace) degli elementi della disciplina d: i contenuti specifici di D_d non sono più i contenuti della disciplina d, sono nuovi rispetto a d;
- i contenuti di un’altra teoria, più generale, che potrebbe identificarsi come quella che si pone il problema generale di come passare dal caso specifico di d ai contenuti di D_d, quale che sia la disciplina d; questa sarebbe la didattica generale.

A quel punto, nell’articolo si esaminavano alcune caratteristiche della storia dell’insegnamento della matematica, dall’antichità agli anni ’70, quando nacque il problema assai più serio e significativo dell’apprendimento della matematica, dando il via alla moderna didattica della matematica. Si parlava dunque di teoria delle situazioni, dando spazio agli studi specifici relativi alla trasposizione didattica, all’ingegneria didattica, al contratto didattico, idea di concetto, teoria degli ostacoli, citando Lev Vygotskij (1934/1990, cap. IV).

Nel tentativo di dar voce a varie componenti in questo dibattito storico, decidemmo di fare riferimento alle seguenti posizioni, quelle che maggiormente vennero accolte all'inizio della storia della didattica della matematica:

- Gerard Vergnaud (Vergnaud, Holbwachs, & Rouchier, 1977, p. 9):

  > È necessario scartare ogni schema riduzionista: la Didattica non è riducibile né alla conoscenza di una disciplina, né alla Psicologia, né alla Pedagogia, né alla Epistemologia. Essa suppone tutte le precedenti ma non può ridursi a nessuna di esse; dato che ha un'identità propria, i propri problemi e i propri metodi. Questo è un punto condiviso dai ricercatori che hanno scelto questa direzione.

- Jean Brun (1981, p. 15): "Il rinnovamento del termine 'didattica' nelle Scienze dell'educazione vuole restaurare l'importanza dell'analisi dei contenuti dell'insegnamento".
- Daniel Lacombe (1985, p. 394): "La didattica include essenzialmente la trasmissione della conoscenza e delle capacità; questa costituisce, di conseguenza, il nucleo cognitivo della ricerca sull'insegnamento".
- François Audigier (1990, p. 7): "La Didattica si differenzia dalla Pedagogia giacché tiene in conto sistematicamente i contenuti disciplinari".

Quanto precede si riferisce alla didattica generale e al suo interesse verso le discipline. Ma se pretendiamo definire che cosa sia una didattica disciplinare, vediamo che cosa dicono ben noti autori al riguardo:

- Régine Douady (1984, p. 8): La didattica della matematica è:

  > lo studio dei processi di trasmissione e di acquisizione dei diversi contenuti di questa disciplina (la Matematica) [e] si propone di descrivere e spiegare i fenomeni relativi alla relazione fra l'insegnamento e l'apprendimento. Essa non si riduce assolutamente a cercare il modo migliore di insegnare un determinato concetto.

- Gerard Vergnaud (1985, p. 22): "La didattica di una disciplina (…) studia i processi di trasmissione e di acquisizione in relazione con il dominio specifico della disciplina o delle scienze vicine con le quali interagisce".

Va detto che nel 1999 era uscito un nostro lungo testo nel quale la didattica della matematica era studiata in tutti i suoi dettagli, anche in relazione ai temi che qui si stanno delineando (D'Amore, 1999).

Per conoscere la storia dell'idea di didattica, così come la si concepisce oggi, si raccomanda di cominciare con Artigue e Douady (1986) le quali, per quanto con alcune differenze tra loro, propongono come anno di nascita in Francia il 1974.

In quanto al feroce dibattito relativo alla formazione dei docenti di matematica, facciamo attualmente riferimento a Fandiño Pinilla (2003a). Nel nostro articolo in analisi, si concludeva:

> Nel millennio anteriore abbiamo cercato di debellare l'idea, ancora viva, che: "per insegnare Matematica è sufficiente conoscere la Matematica". Non può essere

> così e mai lo è stato: già nel secolo XVIII si era compreso che questo non è possibile! (D'Amore, 2000, p. 47)

raccomandando le seguenti letture: Godino (1996) e D'Amore e Martini (2000) per un approfondimento sul tema. Qui ci limitiamo a ricordare che Felix Klein già alla fine del secolo XIX lamentava la mancanza di una preparazione universitaria per la professione di docente di matematica (Loria, 1933). Secondo Klein il periodo degli studi universitari costituisce semplicemente una parentesi, che egli denominò *parentesi universitaria*. Prima, il futuro docente è allievo di scuola secondaria; dopo di che vive questa parentesi e, finalmente, diventa insegnante di secondaria; e, siccome non ha avuto nessuna preparazione a questa professione, può solo ricorrere al modello preuniversitario che conosce e che ha vissuto.

Seconda parte

Inizia con due domande che costituivano una vera e propria sfida agli esperti: Che cosa ci si aspetta dai futuri sviluppi? Che tipo di ricerche potranno assumere interesse rilevante?

Per diversi motivi che vengono brevemente esposti qui subito dopo, la scommessa era sui seguenti temi:

1. registri, semiotica e noetica;
2. il problema della mancata devoluzione;
3. il problema della relazione personale con il sapere;
4. l'influenza della ricerca empirica sul lavoro concreto e sulla gestione curricolare da parte del docente.

Qual era la rilevanza ai tempi del dibattito dell'epoca (2000), nei contesti accademico, concettuale, sociale? Distinguiamo i quattro punti per fare un'analisi più puntuale, anche se breve.

1. Registri, semiotica e noetica

Contesto accademico. Nel mondo accademico questi temi, erano entrati immediatamente, per la loro forza non solo concettuale, ma anche concreta. Si trattava di una nuova strada per l'analisi dei contesti d'aula; se, come noi da sempre affermiamo, uno degli scopi principali della ricerca in didattica della matematica è lo studio analitico delle situazioni d'aula quando il tema è la matematica, questa nuova strada offriva un potente strumento di analisi. Dunque, nel contesto accademico, il tema era assolutamente dominante.

Contesto concettuale. Non c'è dubbio, e lo vedremo anche dopo, che sul piano concettuale l'impatto di questi studi è stato notevole in contesto internazionale. Vorremmo solo ricordare la allora sorprendente idea di "paradosso cognitivo" oggi detto "di Duval",[2] sul quale sono stati immediatamente scritti molti testi,

[2] "(…) da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche

anche sotto forma di tesi dottorali. Riteniamo di poter affermare che si è trattato del tema di maggior rilevanza nel campo della didattica della matematica di quel periodo, fra i primi anni ’90 e, forse, tuttora.

Contesto sociale. Il mondo della scuola si è subito impadronito, in tutti i continenti, di questi temi molto concreti, temi che affrontano la problematica della didattica in modo molto vicino alla prassi scolare, a tutti i livelli di scolarità.

2. Il problema della mancata devoluzione

Ricordiamo che si intende con *devoluzione* la prima fase che, nella teoria delle situazioni, viene proposta per definire la cosiddetta situazione adidattica. Essa è talmente ben delineata e costruita, che è servita di base per molti progetti didattici concreti da portare in aula e tutt’oggi riveste un interesse enorme non solo teorico, ma anche empirico, nella prassi docente. Si dà quasi per scontato che la devoluzione abbia successo automatico, che gli studenti cioè accettino di “implicarsi” personalmente nell’affrontare il problema, il compito che l’insegnante propone nel momento della devoluzione (la seconda fase della definizione di situazione adidattica è, infatti, l’*implicazione*). Ma se essa non ha successo, tutto il costrutto teorico ipotizzato nella teoria delle situazioni crolla. Quali sono le possibili cause del fallimento della devoluzione? A quei tempi, fine del II millennio, ci si preoccupava di studiare l’insorgere di queste cause, ma di fatto non c’erano studi scientifici al riguardo, solo esempi dettati da esperienze concrete. In questo nostro articolo del 2000 si prevedeva che questo sarebbe stato un tipo di studi del futuro.

Contesto accademico. Se consideriamo, come da sempre noi proponiamo, che la didattica della matematica possa essere pensata come una matematica applicata (*applied mathematics*),[3] il problema del fallimento nella fase di

---

che è possibile un’attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l’apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L’impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considerano le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche” (Duval, 1993, p. 38; la traduzione è nostra, concordata con l’Autore).

[3] Si intende oggi con la dizione *matematica applicata* l’insieme di vari aspetti e di differenti rami della matematica i cui cultori si occupano dello studio di diverse tematiche matematiche che si sviluppano nell’applicare le conoscenze matematiche ad altri campi (non solo scientifici e tecnici). Ci ispiriamo a Stolz (2002). Nel corso del 2006 si tenne a Torino, presso il Dipartimento di Matematica dell’Università, il Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Una delle diverse discipline della matematica applicata era, appunto, la Mathematics Education; gli Atti di quel settore del convegno furono pubblicati in un fascicolo di una rivista di didattica della matematica: *La matematica e la sua didattica*,

devoluzione ha aspetti importanti, perché serve a determinare che cosa produce un effetto positivo e che cosa no, in un processo di tipo causale. Il che è proprio la base dello studio della matematica applicata.

Contesto concettuale. Capire i possibili fallimenti di ciascuna fase costituente la definizione (meglio: la descrizione) di una situazione adidattica ci sembrava essere, concettualmente parlando, elemento di rilevanza non solo teorica, ma applicata (Brousseau & Brousseau, 1987).

Contesto sociale. Il distacco fra la ricerca e la prassi è un problema reale e grave in qualsiasi contesto: medicina, biologia, chimica, … Lo è anche in didattica della matematica. L'origine dei problemi studiati dalla ricerca scientifica in didattica della matematica hanno le loro basi nella realtà empirica dei contesti educativi pubblici (scuole e università). Tuttavia, i risultati della ricerca stentano o almeno ritardano a giungere nelle aule reali, agli insegnanti che potrebbero trarre vantaggi, nel loro agire quotidiano, dalla loro conoscenza. Cercare di capire, attraverso la ricerca, le modalità e le cause di un fallimento in una prassi educativa, appare un vero e proprio problema di forte interesse sociale. Nel 2000 questo era, infatti, un problema sociale molto avvertito.

3. Il problema della relazione personale con il sapere

Più volte e in mille modalità diverse è emersa la constatazione che, l'unico modo per avere la possibilità che un allievo apprenda, è che questi si faccia carico personale del proprio apprendimento (Brousseau, 1986a, b, c). Se questo accade, il sapere non viene più visto dallo studente come un corpo astratto estraneo, un ridondante e vuoto insieme di conoscenze che la società, l'istituzione e l'insegnante hanno scelto per lui, ma come un fatto personale al quale si vuole prima avere accesso e poi del quale si vuole avere dominio, con uno scopo: usarlo. Ma, mentre a parole tutto ciò sembra ovvio e facile, di fatto non lo è. Tutti sanno che il contratto didattico gioca un ruolo determinante in questo processo: lo studente è più propenso a cercare di apprendere che cosa e come rispondere alle richieste dell'insegnante, piuttosto che avere accesso diretto al sapere.

In quegli anni, il dibattito su questo tema era piuttosto forte e il suo studio aveva una certa rilevanza.

Contesto accademico. Il tema di ricerca sotteso a questo problema era dibattuto nei centri di ricerca universitari, dunque a livello accademico. Crediamo di poter affermare che questo era uno dei temi di analisi, se non di ricerca, più presente nei dibattiti.

Contesto concettuale. Da sempre l'essere umano si è chiesto che cosa sia il sapere, che cosa significa sapere, come si usa il sapere, che cosa vuol dire

---

21(1), Atti del: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Mathematics Education. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006.

essere competente, … Alla fine del secolo XX questi divennero temi di forte discussione, tanto da assumere la veste addirittura di temi di analisi legislativa e curricolare, in molti Paesi, spesso in modo alquanto ingenuo, specie quando si parla di metodi per valutare la competenza raggiunta.

Contesto sociale. Come abbiamo appena detto, l'importanza di questo dibattito nel campo concettuale si mescola con i suoi aspetti sociali. Basti dire che in quasi tutti i paesi del mondo si cominciò a discutere di "raggiungimento delle competenze a scuola", prima in America Latina e poi anche in Europa. Molti programmi scolastici nazionali o indicazioni nazionali ministeriali vollero tener conto di questa tematica, dando definizioni non sempre idonee e imponendo nuovi traguardi da far raggiungere a studenti e docenti.

4. L'influenza della ricerca empirica sul lavoro concreto e sulla gestione curricolare da parte del docente

Su questa tematica abbiamo già detto qualcosa, denunciando la distanza fra ricerca scientifica empirica (ricerca condotta da nuclei di esperti ricercatori nelle aule, con tecniche di ricerca diverse che diventavano sempre più precise e significative) e la prassi. Di molti fenomeni di insuccesso apprenditivo oggi si conoscono le ragioni, la ricerca ha rivelato quali siano i punti critici che portano all'insuccesso apprenditivo in diverse situazioni (aveva cominciato Brousseau già negli anni '70, studiando e denunciando i famosi "effetti"). Ma quando l'insegnante svolge il proprio curricolo in aula, tende a creare le stesse situazioni negative di apprendimento denunciate da Brousseau e da altri studiosi, perché non conosce questi risultati. Ci si chiedeva, allora: Come colmare questo iato? Come saldare questo vuoto?

Contesto accademico. Valga quanto già detto in precedenza: se la ricerca universitaria si fa carico non solo di eseguire la ricerca ma anche di trovare una modalità affinché l'insegnante sappia dei risultati ed eviti dunque di incorrere in errori che rendono impossibile l'apprendimento dei propri allievi, allora questa ricerca si trasforma in qualcosa di importante dal punto di vista accademico, dando una dignità diversa e più significativa ad essa.

Contesto concettuale. Ma tale iato non è solo un fatto che accade senza motivi, ci sono cause che vanno studiate concettualmente. C'è una successione che sembra facilmente percorribile: evidenziazione di un problema di mancato apprendimento di un determinato tema T – studio concettuale di questo fenomeno da parte di ricercatori universitari – elaborazione di un piano di ricerca – effettuazione della ricerca – scoperta dei motivi che generano il mancato apprendimento di quel determinato tema T – comunicazione dei risultati di tale ricerca ai docenti – eliminazione dei fattori che portano al mancato apprendimento detto. Questa sequenza sembra assolutamente lineare, logica, semplice ma così non è … Ciò determina un interesse concettuale del fenomeno della mancata trasmissione dei risultati della ricerca a quelli che dovrebbero essere i naturali destinatari di essi, i docenti. Non è solo un fatto empirico, ma concettuale: Che cosa lo determina?

Contesto sociale. Ci pare sia ovvio l’interesse di tipo sociale, sulla base di quanto abbiamo appena detto. I corsi di formazione per insegnanti in servizio e per futuri insegnanti erano (e sono) innumerevoli; molti avevano lo scopo proprio di far conoscere agli insegnanti i risultati della ricerca in didattica della matematica.

3. Evoluzione e sviluppo della nostra prospettiva sul tema: Relazione fra il contenuto dello scritto in esame e il nostro lavoro attuale

Affrontiamo ora l’analisi odierna dell’evoluzione e dello sviluppo, a notevole distanza di tempo, delle prospettive che, in quell’anno 2000, si ipotizzavano rispetto ai quattro temi proposti:

1. registri, semiotica e noetica;
2. il problema della mancata devoluzione;
3. il problema della relazione personale con il sapere;
4. l’influenza della ricerca empirica sul lavoro concreto e sulla gestione curricolare da parte del docente.

1. Registri, semiotica e noetica

Oggigiorno tutti accettano l’idea che nessun oggetto matematico possiede una realtà oggettiva; tutti oggi accettano di fare i conti con il “paradosso cognitivo” enunciato da Raymond Duval. La facile previsione si è rivelata esatta. Dato un concetto matematico, cioè, in realtà, date una o più sue rappresentazioni semiotiche, l’allievo deve farlo proprio, costruirlo cognitivamente attraverso queste azioni:

- *rappresentarlo* in un dato registro
- *trattare* le sue rappresentazioni all’interno di quello stesso registro
- *convertire* tali rappresentazioni da un registro a un altro.

Tutte queste operazioni metasemiotiche sono di grande rilevanza e addirittura essenziali per l’apprendimento. Non si tratta di studi astratti o inutilmente complessi, senza una reale necessità, come potrebbe pensare chi legge superficialmente. Ma ci sono voluti anni per capirlo.

Gli studi teorici sulle tesi di Duval hanno portato a risultati formidabili, alcuni sorprendenti. Ci limitiamo a citarne solo alcuni tra quelli più vicini a noi (Santi, 2011a, b; Sbaragli & Santi, 2011; Iori, 2017, 2018).

Altri studi, condotti come significative esperienze in aula, hanno mostrato come le parole di Duval fossero profetiche per quanto concerne l’apprendimento, il che conferma quanto si era ipotizzato nel 2000; si veda un esempio in geometria nella scuola primaria (Asenova, 2018).

Vari autori, noi stessi, spinti dallo studio della semiotica e realizzate moltissime esperienze in aula, siamo arrivati a concepire un volume che riassumesse teorie e prassi (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013); tale volume si è rivelato molto utile per la riflessione e per la formazione degli insegnanti, non solo in Italia.

Il paradosso cognitivo di Duval sembrava essere in prima istanza una novità assoluta nel campo della semiotica come teoria, dell'apprendimento della matematica e fors'anche sul piano filosofico; ma nostri studi successivi hanno portato a dimostrare che ciò è falso, che la posizione di Duval è inseribile in una tradizione molto antica che i didatti della matematica non avevano precedentemente esplorato (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2015).

Vogliamo anche far notare come, a partire dalle prime illuminanti incursioni di Raymond Duval nel mondo della semiotica (Duval, 1988a, b; 1993; soprattutto: 1995), siano poi nate teorie che, pur essendo del tutto diverse, fanno riferimento anch'esse alla semiotica come base teorica ed empirica.

Vogliamo riferirci, come primo esempio, all'EOS (Enfoque Onto Semiótico) che ha avuto un successo internazionale notevole (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2017; D'Amore & Godino, 2006, 2007; Font, Godino, & D'Amore, 2007; Godino & Batanero, 1994; solo per fare alcuni esempi).

Come secondo riferimento citiamo la TO (Theory of Objectification), una teoria attualmente fra le più apprezzate in contesto internazionale (D'Amore, 2015; D'Amore & Radford, 2017; D'Amore, Radford, & Bagni, 2006; Radford, 1997; 2002; 2003; 2004; 2005; 2006; 2013a, b; 2014). A noi pare particolarmente interessante lo scritto Radford (2017) nel quale il creatore della TO svela le basi personali sulle quali la teoria fu ideata, concepita e costruita.

La proliferazione degli studi in didattica della matematica su temi relativi alla semiotica fu tale che nel 2006 si decise di pubblicare una rassegna internazionale su di essi, invitando i maggiori protagonisti a delineare le peculiarità del loro specifico filone di ricerca; per questo scopo si produsse un numero speciale della rivista *Relime* (Radford & D'Amore, 2006).

In questi ultimi anni, università e case editrici hanno cercato di produrre lavori di sintesi sulle ricerche in semiotica, destinati a docenti in formazione e a studenti di master e dottorato di ricerca, anche, appunto, come materiale idoneo all'avvio alla ricerca (Duval, 2017; Duval & Saenz Ludlow, 2016).

2. Il problema della mancata devoluzione

Su questo tema non si sono sviluppati studi specifici, come era invece nelle nostre previsioni. Quel che supponevamo è che non si tratti solo di un problema affettivo o relativo alle modalità dell'istituzionalizzazione. Il nodo del problema potrebbe avere le sue radici nell'incapacità di lavorare con queste necessarie operazioni semiotiche e metasemiotiche, con la conseguente rinuncia da parte dello studente. Oppure potrebbe risiedere nell'incapacità di captare e accettare il passaggio della relazione personale con il sapere all’istituzionalizzazione. Cioè si possono intendere la noetica e le difficoltà legate al suo accesso come ulteriore causa del fallimento della fase di devoluzione (D’Amore, 2003a).

Tuttavia, molti lavori (di quelli citati in precedenza) mostrano le difficoltà degli studenti in questo campo. Fra i più recenti, Becerra Galindo (2017) fissa la sua attenzione sulle difficoltà di interpretare le rappresentazioni semiotiche di insiemi infiniti, rappresentazioni spesso ambigue che appaiono sui libri di testo e che sono usate con ingenuità critica da alcuni insegnanti; Ramírez Bernal (2017), più in generale, studia le difficoltà di apprendimento degli studenti universitari, mettendo in evidenza, in particolare, le difficoltà di gestione delle rappresentazioni semiotiche; egli discute di ciò con i docenti coinvolti nella ricerca, all’inizio spesso neppure consapevoli di queste difficoltà.

3. Il problema della relazione personale con il sapere

Nel nostro lavoro del 2000, esaminato in questo articolo, si cercava di avviare una discussione critica sull’idea di “concetto”, visto l’intreccio complesso di interpretazioni che si proponevano in quel periodo. Riteniamo di poter affermare che era allora ancora rilevante la posizione cosiddetta antropologica che mette in evidenza l’importanza delle relazioni fra $R_I(X,O)$ [relazione istituzionale con l’oggetto del sapere] e $R(X,O)$ [relazione personale con l’oggetto del sapere] (simboli e terminologia di Chevallard, 1992). Ovviamente, qui, per “oggetto di sapere” si intende “oggetto *matematico* del sapere” ciò che Chevallard (1991) definisce come:

> un emergente da un sistema di prassi nel quale si manipolano oggetti materiali che si scompongono in diversi registri semiotici: registro orale; delle parole o delle espressioni pronunciate; registro dei gesti; dominio della iscrizione o meglio di quel che si scrive o disegna (grafici, formule, calcoli, …), cioè registro della scrittura. (p. 8)

Su questo tema, a nostro avviso, ci sono stati studi che hanno permesso di chiarire e soprattutto di delimitare il problema; l’idea che alla “costruzione cognitiva di un concetto” parteciperebbero tanto la parte istituzionale (il Sapere) quanto la componente personale (di chiunque abbia avuto accesso a questo sapere, non solo l’esperto) è stata suggerita da diversi autori, per esempio Godino e Batanero (1994), per i quali si tratta precisamente di studiare le relazioni fra significato istituzionale e personale degli oggetti matematici. Ma il 1994 è prima del 2000! Diamo questo riferimento solo per collocare storicamente la questione. Alcuni nostri lavori successivi al 2000 hanno affrontato questo tema, per esempio D’Amore (2001a; 2002; 2003a, b; 2004).

Una nuova modalità di studiare, dopo il 2000, la relazione personale con il sapere è di tipo sociologico, modalità che supera e comprende a nostro avviso quella antropologica. Fra tutti i lavori prodotti in questo campo, suggeriamo solo alcuni fra quelli a noi più vicini (Bagni & D'Amore, 2005; D'Amore, 2005; D'Amore, Font, & Godino, 2007, 2008; D'Amore & Godino, 2006, 2007).

Come abbiamo accennato in precedenza, a questo tema è collegato quello assai complesso e controverso delle acquisizioni di competenze; lo studente viene visto non più solo come colui che acquisisce conoscenze, grazie a un rapporto personale con il sapere, ma competenze. E qui va ripetuto che questo modo di vedere le cose scolastiche ha avuto un notevole impatto internazionale anche normativo, per esempio presso molti Ministeri dell'Istruzione o dell'Educazione. Noi abbiamo proposto alla collettività, a partire proprio dalla fine del XX secolo, vari studi a proposito (per esempio, fra i primi: Fandiño Pinilla, 1999; Fandiño Pinilla & Pedraza Daza, 1999), nei quali si configurava un'idea concreta di competenza, e una distinzione fra "competenza in matematica" e "competenza matematica", la prima endogena, interna, intrinseca alla matematica, la seconda, più interessante, che permette di guardare il mondo con occhi matematici, cioè una competenza che rende possibile interpretare fatti, fenomeni, avvenimenti, oggetti, artefatti con la competenza acquisita in matematica, proprio grazie a un intenso rapporto personale fra studente e sapere (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2003, 2006; Fandiño Pinilla, 2003b, 2004, 2005a, b, 2006). Fino ad arrivare a un volume che raccoglie studi compiuti in Colombia, Italia, Spagna e Svizzera, dando risposte complesse e talvolta problematiche a tutti gli interrogativi di ricerca che ci eravamo posti negli anni precedenti (D'Amore, Godino, Arrigo, & Fandiño Pinilla, 2003).

4. L'influenza della ricerca empirica sul lavoro concreto e sulla gestione curricolare da parte del docente

Nell'articolo del 2000 che stiamo esaminando, si può leggere la seguente frase:

> il mondo della ricerca in Didattica della Matematica si dividerà definitivamente in due: coloro che per sempre affronteranno studi a carattere "astratto", non legati alla realtà dell'aula, e coloro che continueranno a sognare che tutta questa valanga di ricerche, comprese quelle teoriche, dovrebbero confluire nelle aule, formando competenze professionali del docente. (p. 47)

E, poco oltre, un'ottimistica scommessa per il futuro: "In questo millennio si dovrà perseguire un traguardo molto più complesso: costruire un curricolo coerente con i risultati ottenuti nelle ricerche" (p. 47).

Crediamo che il primo punto sia stato centrato in pieno: alcune ricerche sono sempre più astratte, sono sempre più lontane da quelle empiriche che coinvolgono l'aula reale, nella sua incredibile multiforme varietà. Bisogna fare attenzione, però; abbiamo sentito accusare di astrattezza teorie come l'EOS e la TO che, invece, sono di una concretezza ammirevole, affascinante, secondo noi evidente. Non bisogna confondere la profondità teorica con una supposta lontananza dal mondo della scuola reale; questa identità è falsa, dimostra colpevole leggerezza in chi la sostiene. Dimostra che costui non ha studiato a fondo la/e teoria/e, come invece si dovrebbe fare.

In cambio, ci sono interessanti ricerche empiriche che danno sempre più e sempre meglio idea di come funzionino i meccanismi di apprendimento e di comunicazione, per esempio fra adulti e studenti e fra studenti.

Il secondo punto, invece, è assai lontano dal realizzarsi; abbiamo sentito a volte narrare di paesi nei quali si sono fatte modifiche ai programmi ufficiali di matematica o alle indicazioni ministeriali nazionali con lo scopo dichiarato di tener conto della ricerca in didattica della matematica; ma, a onor del vero, un’attenta analisi ha sempre mostrato che ciò non è vero. C’è talvolta qualche attenzione in più, ma sempre ingenua, assai lontana dalla vera ricerca scientifica. La nostra scommessa su questo punto, dunque, non è stata per ora vinta.

Tutto ciò riguarda evidentemente la formazione professionale degli insegnanti di matematica, quelli in servizio e quelli in formazione. Il tema è fra i più studiati al mondo; esistono addirittura linee di ricerca per dottorati sul tema della formazione docente, in tutto il mondo. Questa volta nemmeno proviamo a dare una bibliografia di riferimento, perché sarebbe immensa. Ci limitiamo a far osservare come sia a nostro avviso necessario cominciare a studiare il nuovo problema della “didattica della didattica della matematica”, dato che in molte, troppe, università del mondo, la disciplina didattica della matematica nei corsi post laurea e per la formazione dei futuri insegnanti di matematica è affidata a colleghi volonterosi ma improvvisati e spesso ingenui che non conoscono questa disciplina e la confondono con la matematica stessa, o con la storia della matematica, con l’epistemologia della matematica, con la matematica divulgativa, con le matematiche elementari da un punto di vista superiori (in memoria di Felix Klein), con giochetti e giochini aventi a che fare con la matematica ricreativa, o con il buon senso e l’esperienza. Su questo punto abbiamo proposto vari studi, fra i quali citiamo solo D’Amore e Fandiño Pinilla (2013b).

Vogliamo far notare una riflessione che ci pare interessante; la versione in lingua spagnola del lavoro appena citato, notevolmente ampliata rispetto al precedente (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2017b), appare in un libro già ricordato (D’Amore & Radford, 2017) con prefazioni di Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Ebbene, nella sua Prefazione, Michèle Artigue afferma:

> Il (…) testo, scritto con Martha Isabel Fandiño Pinilla, è una riflessione sulla spinosa questione della didattica stessa. In questa riflessione gli autori ci invitano, basandosi sulla loro ricca esperienza in questo campo, a comprendere come il passaggio dall’insegnamento della matematica all’insegnamento della sua didattica modifica i diversi elementi del classico triangolo della didattica. Si percepiscono chiaramente le conseguenze dell’assenza di accordi sui tipi e sui

> contenuti dei saperi che devono essere trasmessi, anche se detta assenza non è sufficiente a spiegare le ragioni per le quali i risultati della ricerca didattica hanno tanta difficoltà ad alimentare efficacemente la formazione dei docenti. Non ho potuto non riconoscere una relazione fra questa riflessione e i dibattiti e i lavori che sono stati condotti nella mia stessa comunità a proposito della formazione dei docenti così come dei formatori dei docenti sugli equilibri idonei fra una didattica oggetto e una didattica strumento, così come sulle tecniche e i metodi da sviluppare per ancorare la formazione in realtà di pratica e rispondere nel miglior modo possibile alle necessità dei docenti. (pp. 15–16)

Crediamo che questa testimonianza di tanto illustre personaggio garantisca l'importanza di questo tema fra le future riflessioni doverose per la nostra comunità internazionale.

4. Conclusioni

Questo tipo di esercizio, la revisione critica di un proprio articolo a distanza di quattro lustri, è di straordinaria importanza in una ricerca come la nostra in didattica della matematica che coinvolge sì teorie, ma anche e forse soprattutto realtà empiriche di aula.

Noi già ne facemmo una anni fa. Nel 1998 pubblicammo un articolo (D'Amore, 1998) nel quale si faceva una ricerca strettamente empirica con studenti di diverse età a proposito dell'uso contemporaneo di diversi registri semiotici, per studiare in profondità il trattamento e la conversione, ma dal punto di vista degli allievi. In diverse occasioni, poi, a partire dal 2006, riesaminammo quei risultati (le modalità della loro raccolta, della loro registrazione, della loro interpretazione e, soprattutto, le conclusioni) alla luce delle nuove emergenti e sempre più profonde metodologie di analisi e dei passi da giganti fatti dallo studio dell'uso della semiotica in aula. I risultati critici sono impressionanti! Quelli del 1998 sembrano ora a noi stessi solo i primi incerti passi nella ricerca empirica di base.

A parte le modalità e i risultati, ci si rende conto di come, 18 anni dopo, temi che sembravano il centro dell'universo della ricerca siano scomparsi, desueti o assorbiti in altri; al contrario, temi che balbettavano come neonati si sono imposti e hanno dato luogo a vere e proprie teorie dominanti.

Nessun esercizio di auto-analisi a distanza di anni è importante come questo; il che spiega, a nostro avviso, il deleterio continuo insistere di alcuni ricercatori su temi e modalità, mai messe in seria analisi critica.

A parte il personale aumento di consapevolezza critica, questo esercizio è utile per chi, come noi, lavora in dottorati di ricerca, per far sì che i nostri allievi siano allenati e coinvolti in serie ricerche attuali con visioni proiettate sul futuro e non su opache e ingenue ipotesi di ricerca desuete o superate senza consistenza teorica. I nostri studenti se lo meritano e la ricerca ha bisogno di loro.

Tutto ciò vuole essere un omaggio alla rivista *Educación Matemática*, per il suo contributo internazionale alla ricerca in didattica della matematica.

Riferimenti bibliografici

Artigue, M., & Douady, R. (1986). La didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie*, *20*(76), 69–88.

Audigier, F. (1990). Histoire, géographie, éducation civique. *Collège Lycée*, 8. Parigi: CRDP.

Asenova, M. (2018). *Esperienze relative alle costruzioni geometriche con riga e compasso nella scuola elementare*. Manoscritto inviato per la pubblicazione.

Bagni, G. T., & D’Amore, B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica*, *19*(1), 73–89.

Becerra Galindo, H. M. (2017). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 191–201.

Brousseau, G. (1972). Processus de mathématisation. In APMEP (Ed.), *La mathématique à l’école élémentaire* (pp. 428–457). Parigi: APMEP.

Brousseau, G. (1980a). Les échecs électifs en mathématiques dans l’enseignement élémentaire. *Revue de Laryngologie, Otologie, Rhinologie*, *101*(3–4), 107–131.

Brousseau, G. (1980b). L’échec et le contrat. *Recherches en didactique des mathématiques*, *1*(41), 177–182.

Brousseau, G. (1982). *À propos d’ingénierie didactique.* Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l’analyse et la construction des situations d’enseignement et d’apprentissage. *Atti della Riunione della III Università Estiva di didattica della matematica di Olivet* (pp. 99–108). Grenoble: IMAG.

Brousseau, G. (1986a). *La théorisation des phénomènes d’enseignement des mathématiques* (Thèse pour le doctorat d’état). Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1986b). *Le jeu et l’enseignement des mathématiques.* (Conferenza al 59esimo convegno AGIEM). Bordeaux.

Brousseau, G. (1986c). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématique*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1988a). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, *9*(3), 309–336.

Brousseau, G. (1988b). *Perspectives sur la didactique des mathématiques*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1988c). Traitement de la mémoire des élèves dans le contrat didactique. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactique des mathématiques et de l’informatique.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1988d). Didactique fondamentale: Didactique des mathématiques et formation des maîtres. *Atti della Riunione della III Università Estiva di didattica della matematica di Olivet* (pp. 10–25). Bordeaux: IREM.

Brousseau, G. (1989a). Utilité et intérêt de la didactique des mathématiques pour un professeur de collège. *Petit x,* 21, 47–68.

Brousseau, G. (1989b). La tour de Babel. *Études en didactique des mathématiques*, 2. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica* (B. D'Amore, Ed.). Bologna: Pitagora.

Brousseau, G., & Pérez, J. (1981). *Le cas Gaël*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.

Brousseau, N., & Brousseau, G. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire: Comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence*. Bordeaux: IREM, Université de Bordeaux I.

Brun, J. (1981). À propos de la didactique des mathématiques. *Math-École*, *21*(100–101), 14–21.

Brun, J. (1996). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. In J. Brun (Ed.), *Didactique des mathématiques* (pp. 19–43). Neuchâtel: Délachaux et Niestlé. [Appare anche in: M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavignot (Eds.). (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. (pp. 67–83). Grenoble: La Pensée Sauvage].

Bunge, M. (1985). *Pseudociencia y ideología*. Madrid: Alianza.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG. Grenoble: Université J. Fourier.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1),73–112.

Conne, F. (1996). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. In J. Brun (Ed.). *Didactique des mathématiques* (pp. 275–338). Neuchâtel: Délachaux et Niestlé.

D'Amore, B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli – Relational objects and different representative registers: cognitive difficulties and obstacles. *L'educazione matematica*, *13*(1), 7–28. [In lingua spagnola: 1998. Objetos relacionales y diversos registros representativos: dificultas cognitivas y obstáculos. *Uno*, *5*(15), 63–76].

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [In lingua spagnola: 2006, *Didáctica de la matemática*. Prefazioni di Colette Laborde, Guy Brousseau, Luis Rico. Bogotá: Editorial Magisterio]. [In lingua portoghese: 2007, *Elementos da didática da matemática*. São Paulo: Livraria da Física. Prefazioni di Ubiratan D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde e Guy Brousseau].

D'Amore, B. (2000). La didáctica de la matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses. *Educación Matemática*, *12*(1), 39–50.

D'Amore, B. (2001a). *Scritti di epistemologia matematica. 1980–2001*. Bologna:

Pitagora.
D’Amore, B. (2001b). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, *8*(27), 51–76.
D’Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemática como causa de la falta de devolución. *TED*, *10*(11), 63–71.
D’Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, *23*(1), 47–51.
D’Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Prefazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [In lingua spagnola: D’Amore B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. Prefazioni di Guy Brousseau e di Ricardo Cantoral. México DF, México: Reverté-Relime].
D’Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, *11*(35), 90–106.
D’Amore, B. (2005). Pratiche e metapratiche nell’attività matematica della classe intesa come società: Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*, *19*(3), 325–336.
D’Amore, B. (2007). Voci per il dizionario: Frabboni, F., Wallnöfer, G., Belardi, N., & Wiater, W. (Eds.). (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto.* Torino: Bollati Boringhieri. Definizioni: Didattica disciplinare (pp. 72–75), Formazione in scienze naturali (pp. 140–142), Formazione in matematica (pp. 145–147), Scienza (pp. 335–337). [Versione in lingua tedesca: D’Amore, B. (2010). Voci per il dizionario: Wiater, W., Belardi, N., Frabboni, F., & Wallnöfer, G. (Eds.). (2010). *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. Definitionen: Fachdidaktik (pp. 98–101), Mathematische Bildung (pp. 227–228), Naturwissenschaftliche (pp. 255–258), Wissenschaft (pp. 362–364)].
D’Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Numero speciale] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino “Carlo Bo”*. Disponibile da http://isonomia.uniurb.it/epistemologica
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2002). Un acercamiento analitico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*, *14*(1), 48–61.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). “Competenze”: obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*, *17*(3), 327–338.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Una riflessione sul termine “competenza” nell’educazione matematica. *Difficoltà in matematica*, *2*(2), 155–164.
D’Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). *Le didattiche disciplinari*. Prefazione di Franco Frabboni. Trento: Erickson.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013a). El paso más largo. Sobre la necesidad de no tirar por la borda (en el nombre de un modernismo vacío) las teorías de la educación matemática que explican, perfectamente, situaciones reales del aula. *Acta Scientiae. Revista de ensino de Ciências e Matemática*, *15*(2), 246–256. Disponibile da http://periodicos.ulbra.br/index.php/acta

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013b). La didattica della didattica della matematica: esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *36B*(4), 325–353.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *DiM Difficoltà in Matematica*, *11*(1), 89–109.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (Eds.). (2015a). *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y teórica*. Prefazione di: Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla. Testi di: Guy Brousseau, John Alexander Alba, Luis Carlos Arboleda, Ferdinando Arzarello, Giorgio Bolondi, Ricardo Cantoral, Bruno D'Amore, Raymond Duval, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Vicenç Font, Athanasios Gagatsis, Juan Diaz Godino, Salvador Llinares. Atti del Convegno Internazionale: *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica*, Santa Marta (Colombia), 9–11 settembre 2015, organizzazione scientifica di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla con il coordinamento dell'Universidad de La Sabana. Chía (Colombia): Ediciones Universidad De La Sabana.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015b). Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática. *Educación Matemática*, *27* (3), 7–44.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017a). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática. Theoretical reflections on the basis of the onto-semiotic approach to the didactics of mathematics. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23–26 marzo 2017. Disponibile da http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017b). La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. In B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 41–66). Prefazioni di Michèle Artigue e di Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Disponibile da http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora. (In lingua spagnola: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Prefazioni di Raymond Duval, Luis Radford e Carlos Eduardo Vasco. Bogotá:

Magisterio). (In lingua portoghese: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2015). *Primeiros elementos de semiótica. Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Prefazioni di Raymond Duval, Luis Radford, Carlos Eduardo Vasco Uribe e Ubiratan D'Ambrosio].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177–212. doi: 10.12802/relime.13.1822. http://www.clame.org.mx/relime.htm

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, *38*(2), 49–77.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, D. J. (2008). La dimensione metadidattica dei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *22*(2), 207–235.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

D'Amore, B., & Frabboni, F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare*. Milano: Bruno Mondadori.

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9–38.

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en Didáctica de la Matemática. *Relime*, *10*(2), 191–218.

D'Amore, B., Godino, D. J., Arrigo G., & Fandiño Pinilla, M. I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Martini, B. (2000). Sobre la preparación teórica de los maestros de matemáticas. *Relime*, *3*(1), 33–46.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefazioni di Michèle Artigue e Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. http://die.udistrital.edu.co/sites/default/files/doctorado_ud/publicaciones/ensenanza_y_aprendizaje_de_las_matematicas_problemas_semioticos_epistemologicos_y_practicos.pdf

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *29B*(1), 11–40. [Versione in lingua spagnola in D'Amore, B., & Radford, L. (2017), pp. 165–192].

Douady, R. (1984*). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* (Thèse d'État). Université de Paris. [Si veda anche: *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 1986, 5–31].

Durkheim, É. (1968). *Éducation et sociologie*. Parigi: PUF. (Lavoro originale pubblicato nel 1922).

Duval, R. (1988a). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 7–25.

Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 57–74.

Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 1*(1), 235–253.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang. [In lingua spagnola: Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle].

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Prefazione di Bruno D'Amore. Cham, Switzerland: Springer International Publishing AG.

Duval, R., & Sáenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Prefazione di Bruno D'Amore. Articoli commentati da Bruno D'Amore e Carlos Eduardo Vasco Uribe. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Fandiño Pinilla, M. I. (1999). Alumnos competentes: objeto de formación (evaluación) del profesor de matemáticas. In M. Bonilla, M. I. Fandiño Pinilla, N. Sanchez, & J. Romero (1999), *La evaluación de profesores de matemáticas* (pp. 32–38). XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Fandiño Pinilla, M. I. (Ed.). (2003a). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I. (2003b). "Diventare competente", una sfida con radici antropologiche. *La matematica e la sua didattica*, *17*(3), 260–280.

Fandiño Pinilla, M. I. (2004). "Diventare competente": una sfida con radici antropologiche. In G. Arrigo (Ed.), *Atti del Convegno di didattica della matematica 2004*. Locarno, 24–25 settembre 2004. Locarno: Quaderni Alta Scuola Pedagogica. 109–112.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005a). Competenza e valutazione: una sfida dell'educazione di oggi. In A. M. Benini & L. Gianferrari (Eds.), *Valutare per migliorarsi* (pp. 40–48). Napoli: Tecnodid.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005b). La competencia matemática: un reto con raíces antropológicas. In AA. VV., *Actas del VII Simposio de Educación Matemática*, Chivilcoy (Argentina), 3–6 maggio 2005. www.edumat.com.ar

Fandiño Pinilla, M. I. (2006). Educare alla competenza matematica. *Rassegna*. In B. D'Amore (Ed.), *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione*. (pp. 21–28). Bolzano: Istituto Pedagogico di lingua italiana.

Fandiño Pinilla, M. I., & Pedraza Daza, F. P. (1999). La evaluación de competencias como estrategia para la cualificación de la educación matemática en Colombia. In AA. VV., *Memorias IV Congreso Nacional de Matemática Educativa* (pp. 199–208). Guatemala, novembre 1999. Città di Guatemala: Ministerio de Educación de Guatemala.

Font, V., Godino, D. J., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to rappresentations in mathematical education. *For the learning of mathematics*, *27*(2), 2–7 and 14.

Godino, J. D. (1996). Relaciones entre la investigación en didáctica de las matemáticas y la práctica de la enseñanza. In L. Puig & J. Calderón (Eds.), *Investigación y Didáctica de las Matemáticas* (pp. 119–137). Madrid: CIDE (Ministerio de Educación y Ciencia).

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 275–291. doi:10.1007/s10649-016-9726-3

Iori, M. (2018). Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(1), 95–113. doi:10.1007/s10649-018-9808-5

Kuhn, T. S. (1957). *The Copernican Revolution*. Cambridge: Harvard University Press.

Lacombe, D. (1985). La didactique des disciplines. In AA. VV., *Encyclopedia Universalis* (pp. 394–396). Parigi: Les Enjeux.

Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.). (1960). *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Loria, G. (1933). Commission internationale de l'enseignement mathématique: La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les diverses pays. I. Rapport général. *L'enseignement mathématique*, *34*(1), 5–20.

Mialaret, G. (1982). *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle*. Caen: CERSE.

Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 181–189.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14–23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*, *18*(1), 4–23.

Radford, L. (2005). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica*, *19(2),* 191–213.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [numero speciale]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 103–129.

Radford, L. (2013a). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7–44.

Radford, L. (2013b). *De la teoría de la objetivación*. Conferenza inaugurale del XIV

Convegno Colombiano de Matemática Educativa, Barranquilla, Colombia, Ottobre 9–11, 2013. Atti del convegno omonimo: *Revista Científica*, ottobre 2013, edizione speciale, Disponibile da http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME_14_Revista_Cientifica_EdicionEspecial_-_Memorias_ECME_14.pdf

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132–150.

Radford, L. (2017). Mathematics education theories: The question of their growth, connectivity, and affinity. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 217–228.

Radford, L., & D'Amore, B. (Eds.). (2006). *Semiotics, culture and mathematical thinking*. [Numero speciale] (in lingua spagnola, inglese e francese) della rivista *Relime* (Cinvestav, México DF., México). Introduzione di Luis Radford, conclusione di Bruno D'Amore; articoli di: M. Otte; R. Duval; R. Cantoral, R-M. Farfán, J. Lezama, G. Martínez Sierra; L. Radford; Juan D. Godino, V. Font, M. R. Wilhelmi; A. Koukkoufis, J. Williams; B. D'Amore; A. Gagatsis, I. Elia, N. Mousoulides; A. Sáenz-Ludlow; GT. Bagni; F. Arzarello. Disponibile da http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf; http://luisradford.ca

Ramírez Bernal, H. A. (2017). Posibles cambios en las concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 203–216

Romberg, T. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and methodology of the discipline Mathematics Education*. Atti del II TME (pp. 97–112). Bielefeld-Antwerpen: IDM Publications.

Santi, G. (2011a). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(77), 285–311.

Santi, G. (2011b). Meaning of mathematical objects: a comparison between semiotic perspectives. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME-7). Rzeszów, Polonia, 9–13 febbraio 2011.

Sarrazy, B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*, *28*(112), 85–118. [In lingua italiana: Sarrazy, B. (1998). Il contratto didattico. *La matematica e la sua didattica*, *12*(2), 132–175].

Sbaragli, S., & Santi, G. (2011). Teacher's choices as the cause of misconceptions in the learning of the concept of angle. *International Journal for Studies in Mathematics Education*, *4*(2), 117–157. Disponibile da: http://periodicos.uniban.br/index.php/JIEEM/article/view/194/196, San Paolo, Brasil: Uniban.

Schubauer-Leoni, M. L. (1996). Il contratto didattico come luogo di incontro, di insegnamento e di apprendimento. In E. Gallo, L. Giacardi, & C. S. Roero (Eds.), *Conferenze e seminari 1995–1996*. Torino: Associazione Subalpina Mathesis-Seminario di Storia delle Matematiche "T. Viola". 21–32.

Stolz, M. (2002). The history of applied mathematics and the history of society. *Synthese*, *133*(1–2), 43–57. doi: 10.1023/A:1020823608217

Vergnaud, G. (1985). Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche. In L. Chini Artusi (Ed.),

Numeri e operazioni nella scuola di base (pp. 20–45). Bologna: Zanichelli-UMI.
Vergnaud, G., Holbwachs, F., & Rouchier, A. (1977). Structure de la matière enseignée, histoire des sciences et développement conceptuel chez l’élève. *Revue française de pédagogie*, *21*(45), 7–15.
Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio: Ricerche psicologiche* (L. Mecacci, Trad. it.). Bari-Roma: Laterza. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).

Natural language and "mathematics languages": Intuitive models and stereotypes in the mathematics classroom

Bruno D'Amore[1,3] and George Santi[2,3]
[1]*Professor titular experto, Doctorado Interinstitucional, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*
[2] *Assistant Professor, Libera Università di Bolzano, Italia*
[3]*NRD, Department of Mathematics, University of Bologna, Italia*

Abstract. *Through episodes taken from various research studies in mathematics education carried out over the years by one of the authors, we bring evidence of the interference between natural language and specific language. Within a semiotic perspective we show how and why students' learning experience entails the emergence of intuitive models and stereotypes in mathematics classroom. The notion of didactical contract allows us to interpret students' stereotypical behaviors within the Chevallard's triangle, Knowledge – teacher – student.*

Keywords: natural language and specific language, stereotypes, intuitive models, objectification, semiotic means of objectification, semiotic system, semiotic functions, meaning.

Sunto. *Attraverso episodi tratti da varie ricerche in didattica della matematica, condotte nel corso degli anni da uno degli autori, mettiamo in evidenza l'interferenza tra linguaggio naturale e linguaggio specifico. All'interno di una prospettiva semiotica mostriamo come e perché l'esperienza di apprendimento degli studenti comporti l'emergere di modelli intuitivi e stereotipi nelle lezioni di matematica. La nozione di contratto didattico ci consente di interpretare i comportamenti stereotipati degli studenti all'interno del triangolo di Chevallard, Sapere - insegnante - studente.*

Parole chiave: linguaggio naturale e linguaggio specifico, stereotipi, modelli intuitivi, oggettivazione, mezzi semiotici di oggettivazione, sistema semiotico, funzioni semiotiche, significato.

Resumen. *A través de episodios tomados de diversas investigaciones en educación matemática, realizadas a lo largo de los años por uno de los autores, mostramos algunas pruebas de la interferencia entre el lenguaje natural y el lenguaje específico. Dentro de una perspectiva semiótica, mostramos cómo y por qué la experiencia de aprendizaje de los estudiantes implica la aparición de modelos intuitivos y estereotipos en los cursos de matemática. La noción de contrato educativo nos permite interpretar los comportamientos estereotípicos de los estudiantes dentro del triángulo de Chevallard, Saber - profesor - alumno.*

Palabras clave: lenguaje natural y lenguaje específico, estereotipos, modelos intuitivos, objetivación, medios semióticos de objetivación, sistema semiótico,

funciones semióticas, significado.

1. Introduction

We would like to start the article with the following episode: *I leave this task to the real teachers*.

Seventh grade, students aged 12 or 13. The idea is to bring to light stereotypes (primarily linguistic) and conditionings in mathematical practice at school. I fall back on the "trick" of "Pretend that you are …" (D'Amore & Sandri, 1996). The task proposed is: "Pretend that you are a primary school teacher. … You want to explain to your third grade (8-year-old) students that the area of a rectangle is found by doing base times height". Very many students limit themselves to writing a formula, others explain that the base is *b* and the height is *h*, while others confuse rectangle with triangle. Very few agree to write things out, really getting into the part. One girl did so, however, producing this little masterpiece:

> I don't think I'm up to pretending that I'm a primary school teacher, but I can always try: there's always a first time. Above all, if I really were to be a teacher, I would be very spontaneous and pleasant, so that dialogue with my students could be simple and direct. I would like to have a friendly and amusing relationship, so if I actually had to explain how to find the area of a rectangle, in view of my love of sweet things, I would think of the rectangle as a slab of chocolate. I have tried, but without success. I'm not able to explain that the area of a triangle is found by doing base times height. I leave this task to the real teachers.

This episode is intriguing because apparently little mathematics is involved but nevertheless it tells us a lot about the learning of mathematics. The metacognitive awareness of this pupil is outstanding. Although reluctant, she gives a try in pretending she is a real teacher revealing self-confidence. She highlights her emotional needs for an effective learning of mathematics: spontaneity, pleasantness, communication, simplicity and directness, personal likes. She ends up with a "metacognition in the negative" since she perceives that she is unable to explain how to find the area of a triangle (rectangle) and doesn't feel unease in expressing her difficulty. Above all, this short extract shows the pupil's demand of emotional well-being and personal involvement in his/her learning trajectory.

Luis Radford describes learning as a process of *objectification* that consists in "actively and imaginatively endowing the conceptual objects that the student finds in his/her culture with meaning" (Radford, 2008, p. 223). As pointed out by Godino and Batanero (1994) and Radford (2006), meaning is a double-sided construct consisting of a *personal/individual* meaning and an *institutional/cultural* meaning that are somehow distinguishable but inseparable, like two sides of the same coin. In his/her learning path the student embodies the interpersonal and general meaning of mathematical concepts.

Endowing conceptual objects with meaning clashes against an intrinsic difficulty that lies in the special ontological status of mathematics, whose objects do not allow ostensive references. The only way to access mathematical concepts is to have recourse to a wide range of semiotic representations that theoretical perspectives in mathematics education have positioned with different understandings within their system of principles: Duval’s functional and structural approach (Duval, 1995), Radford’s theory of knowledge objectification (Radford, 2008), Godino’s onto semiotic approach (D’Amore & Godino, 2006; D’Amore & Fandiño Pinilla, 2017), and Arzarello’s semiotic bundle (Arzarello, 2006), just to quote a few examples. Basically, in all perspectives the signs can play a *representational* role or serve as *mediators* of personal and socially shared activities. D’Amore and Fandiño Pinilla (2008) and Santi (2011) have shown that the two perspectives are complementary to each other and can be effectively coordinated to frame mathematical cognition.

In their learning process, students have to handle a complex implementation of signs, that requires to properly *coordinate* several semiotic resources. Furthermore, they have to overcome Duval’s (1995) *cognitive paradox* that leads them to identify mathematical concepts with their representations. D’Amore (2001) accounts for the students’ lack of personal involvement in the learning process, by acknowledging the cognitive and emotional strain entailed in the attempt to access mathematical knowledge. Often their need to endow cultural objects with meaning diverts from the cultural meaning expected by the teacher and the school institution, by clinging to inappropriate *intuitive models* (Fischbein, 2002), *stereotypes* and the *didactical contract* (Brousseau, 1997).

In section 2, we propose a theoretical framework that allows us to analyze the interplay between natural language and mathematical language within a semiotic perspective.

In section 3, we analyze episodes taken from various research studies in mathematics education carried out over the years by one of the authors. Our aim is to highlight the interplay between natural language and *other semiotic systems* when students shift to higher layers of generality by addressing specific mathematical languages.

In section 4, we draw some conclusions of our study.

2. Theoretical framework

As we mentioned in section 1, having recourse to semiotic representations is the only way to access mathematical objects. There are two complementary approaches towards signs. A socio-cultural approach based on Vygotskian *activity theory* stances and a *structural and functiona*l approach.

We present both approaches describing the basic features of Radford's theory of knowledge objectification and Duval's structural and functional approach.

2.1. The theory of knowledge objectification

The theory of knowledge objectification (TKO) pivots around the notion of mediated reflexive activity that conceives *thinking* as "a mediated reflection in accordance with the form or mode of the activity of individuals" (Radford, 2008, p. 218):

- *activity* refers to the individual and social agency towards shared goals, significant problems, operations, labor etc., within a cultural dimension that provides a system of beliefs, conceptions about truth, methods of inquiry, acceptable forms of knowledge;
- *reflection* refers to the dialectical movement of the individual consciousness between his personal thinking, interpretations, emotions and feelings, perceptions and a historically and culturally constituted reality;
- *mediation* refers to the artifacts that, in a Vygotskian sense, are constitutive and consubstantial to thinking since they allow us to carry out activity, i.e. they mediate activity; within TKO the system of artifacts that carry out activity are termed as the *territory of artifactual thought* and it includes objects, artifacts, gestures, natural language, symbolic language, icons, drawings etc.

Advocating a pragmatic ontology, in TKO *mathematical objects* are "fixed patterns of reflexive human activity incrusted in the ever-changing world of social practice mediated by artifacts" (Radford, 2008, p. 222). In this view, mathematical objects lose any intrinsic, a priori, realistic nature. Nevertheless, as fixed patterns of mediated reflexive activity they acquire, within the *cultural-historical dimension,* a form of *ideal existence*:

> "Ideality" is rather like a stamp impressed on the substance of nature by social human life activity, a form of the functioning of the physical thing in the process of this activity. So, all the things involved in the social process acquire a new "form of existence" that is not included in their physical nature and differs from it completely – [this is] their ideal form. (Ilyenkov, 1977, p. 86)

Radford (2016, p. 3) conceptualizes activity in terms of *joint labor*:

> The idea of joint labor seeks to restore to activity its most precious ontological force, namely, the dynamic locus where human existence creates and recreates itself against the backdrop of culture and history. Yet, with its utilitarian and consumerist orientation, contemporary mathematics classroom activity tends to produce and reproduce alienated students. It is argued that the search for non-alienating classroom activity requires a reconceptualization of the classroom's forms of human collaboration and its modes of knowledge production.

(See also: D’Amore, 2015, 2018).

We can say that, after their emergence as fixed patterns of reflexive human activity, mathematical objects become objects of knowledge for students involved in the learning path. TKO defines *learning* as a particular form of mediated reflection, a process of *objectification*:

> An opening movement towards others and the objects of culture. (…) To learn is not merely to acquire something in the corrupted sense of possessing it or mastering it, but to go to culture to find something in it. This is why the outcome of the act of learning is not the construction, re-construction, re-production, re-invention or mastering of concepts: its true outcome is to be found in the fact that, in this encounter with the other and cultural objects, the seeking individual *finds herself*. This creative process of finding or noticing something (a dynamic target) is what I have termed elsewhere a process of *objectification* (Radford, 2002). (Radford, 2008, p. 222)

The artifacts that mediate this special form of reflexive activity are called *semiotic means of objectification.* They are bearers of the historical and cultural development of mathematics and they allow students to transform interpersonal and ideal concepts into embodied objects belonging to their space-time and emotional experience.

Semiotic means of objectification determine the mode of existence of mathematical objects in the pupils’ experience, i.e. they determine how the intentional “arrow” attends such objects. Referring to Husserl (1913/1931) they intertwine the *noetic-noematic phenomenological layers* that altogether result in the full meaning of the mathematical object. For example, we can deal with the circle through the kinesthetic movement of the compass, the definition in natural language, and using a second-degree equation in the algebraic symbolism. The TKO allows us to outline *levels of generality* (Radford, 2004) at which the student objectifies the mathematical concept. The level of generality specifies the degree of embodied experience involved in the reflection mediated by a particular semiotic means of objectification. Recalling the example mentioned above, the compass mediates the circle with a lower level of generality with respect to the second-degree equation. The demand of higher levels of generality, as the individual and cultural meanings converge, obliges the pupil to live a rupture with his/her embodied experience that can bewilder him and lower his personal implication and involvement in the learning process (Radford, 2003).

The role of natural language as a semiotic means of objectification is the turning point in bridging the gap between the embodied experience of the pupil and the interpersonal meaning of the cultural object. Some research (Radford, 2000, 2002, 2004) in this topic has shown how in the generalization of patterns the deictic and generative use of natural language triggers and enhances the shift from the sensorimotor experience to the algebraic symbolism. Exposing the students directly to the algebraic language would result in a shallow learning. Furthermore, as we reach higher levels of generality natural language allows us to keep the relation with the core of meaning that lies in the individual embodied experience. Natural language plays a key role in driving movement, organizing activity in time and space, in triggering rhythm, in singling out and individualizing objects, in activating and supporting schemes. This broad set of possibilities is the inerasable basis for the recognition of operational invariants, thus accessing higher layers of generality. A thorny issue is the relation between natural language and the use of the specific language of mathematics. It requires attention and awareness on the part of the teacher. The use of the specific language of mathematics is a learning objective that allows the student to reach a further layer of generality. It is achieved when embodied meaning has a solid basis to sustain the leap to specific mathematical language that objectifies definitions, generalizations, algorithms, inferential thinking etc. Without an underlying significant reflexive activity in the student's personal experience, the use of specific language can hinder the learning of mathematics. Furthermore, the specific language of mathematics has a semantic density (D'Amore, 1999) that can disembody meaning just as it happens with symbolic language. In this situation the combined use of symbolic language and specific language can foster an unbridgeable gap between the individual meaning of the student and the cultural one, thus entailing a lack of personal implication and the emergence of intuitive models (Fischbein, 1992, 2002) and the didactical contract (Brousseau, 1997). For an in-depth discussion of this topic we refer the reader to D'Amore (1999, pp. 251–261).

We analyzed the TKO within a pragmatist ontology of mathematics. D'Amore (2003) provides a detailed account of realist and pragmatist theories and concludes that there is not a definite boundary between the two perspectives. Ullmann (1962) highlights two complementary features that characterize the development of mathematical objects: the *operational phase* and the *referential phase*. On the one hand mathematical objects and their meaning emerge from and are objectified by reflexive activity, on the other hand it is necessary to linguistically refer to the entities that emerge from such activity. The dual nature of mathematical objects – as patterns of activity and as existing ideal entities in the culture – implies that also meaning and semiotics have a dual nature. We therefore need a semiotic perspective that accounts for the need, in the referential phase, to nominalize and transform signs in order to create relations, generalize, carry out calculations and proofs. Raymond Duval (1995, 2006, 2008) introduced semiotics in mathematical thinking and learning and devised a structural and functional approach to the use of signs.

2.2. Duval's structural and functional approach

In the referential phase that we are addressing in this paragraph, Duval's

(1995) approach could be framed within a realistic theory of meaning (D'Amore, 2003). In fact, according to Duval, every mathematical concept refers to *objects* that do not belong to our concrete experience. In mathematics, *ostensive referrals are impossible*, therefore every mathematical concept intrinsically requires working with semiotic representations, since we cannot display "objects" that are directly accessible.

The lack of ostensive referrals led Duval to assign a constitutive role in mathematical thinking to the use of representations belonging to specific semiotic registers. From this point of view, he claims that there isn't *noetics without semiotics*. "The special epistemological situation of mathematics compared to other fields of knowledge leads to bestow upon semiotic representations a fundamental role. First of all, they are the only way to access mathematical objects" (Duval, 2006).

The peculiar nature of mathematical objects allows us to outline a specific cognitive functioning that characterizes the evolution and the learning of mathematics. The cognitive processes that underlay mathematical practice are strictly bound to a complex semiotic activity that involves the coordination of at least two representation registers. We can say that conceptualization itself, in mathematics, can be identified with this complex coordination of several representation registers.

A semiotic system is devised by (Duval, 2006; Ernest, 2006):

- a *set of basic signs* that have a meaning only when *opposed to or in relation with* other *basic* signs (for example the decimal numeration system);
- a set of o*rganizing rules* for the production of signs from the *basic* ones and for the transformation of signs;
- an *underlying meaning* deriving resulting from the relation of the *basic* signs that form structured semiotic representations.

A *representation register* is a semiotic system that also accomplishes the functions of *communication*, *objectification* and *treatment* (Duval, 1996).

D'Amore (2001) identifies conceptualization with the following *semiotic functions*, which are specific for mathematics:

- c*hoice of the distinctive traits* of a mathematical object;
- *treatment,* i.e. the transformation of a representation into another representation of the same semiotic register;
- *conversion,* i.e. the transformation of a representation into another representation of another semiotic register.

The very combination of these three "actions" on a mathematical object can be considered as the "construction of knowledge in mathematics". But it is not spontaneous nor easily managed and represents the cause for many difficulties in the learning of mathematics when students struggle with the *cognitive paradox.* (See also: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2015;

D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013).

Mathematical objects are recognized as invariant entities that bind different semiotic representations, when treatment and conversion transformations are performed, and as such they cannot be referred to directly. Duval identifies the specific cognitive functioning of mathematics with the coordination of a variety of representation registers. Both the development of mathematics as a field of knowledge and its learning are accomplished through such a specific cognitive functioning.

Duval goes beyond Frege's classical *semiotic triangle* (*sinn-bedeutung-zeichen*) and identifies meaning with the couple (*sign-object*), i.e. a relationship between a sign and an object it represents. The sign becomes a rich structure that condenses both the semiotic representation (*zeichen*) and the way (*sinn*) the semiotic expression offers the object according to the underlying meaning of the semiotic structure. Meaning therefore has a twofold dimension:

- *sinn*, the way a semiotic representation offers a mathematical object;
- *bedeutung,* the reference to an inaccessible mathematical object (D'Amore, 2010).

Meaning making processes and learning require to handle different *sinn* that are networked through semiotic transformations without losing the common *bedeutung* to the invariant mathematical object.

While in the operational phase the language plays a prominent role in sustaining the leap to higher levels of generality, in the referential phase the language sustains the coordination of representation registers via treatment and conversion.

In fact, natural language is a special and more complex semiotic system. Basically, it has 4 *discursive functions* (Duval, 1995, p. 91) that characterize it as a language:

- the *referential function* that allows us to designate an object;
- the *apophantic function* that allows us to say something on the objects we designate under the form of complete statements;
- the *discursive expansion function* that allows us to connect these statements in a coherent way;
- the *discursive reflexivity function* that underlines the validity, the mode and the status given to the expression by those who produce it.

The discursive functions of natural language are responsible for an appropriate control of the semiotic functions at a cognitive and metacognitive level. The key-players in the learning environment have to enact an aware understanding and control of the relation between:

- the spontaneous and narrative use of natural language;
- the specialized use of natural language;

- other semiotic registers used for definitions, deductive reasoning, algorithms etc.

On the one hand in TKO, when synchronically used with other semiotic means of objectification natural language allows students to move along the different layers of generality in which the mathematical object is stratified. On the other hand within a structural and functional approach, natural language, in diachronic transformations of signs, allows students to access ideal entities and to deal with mathematics as an observational science:

> It has long been a puzzle how it could be that, on the one hand, mathematics is purely deductive in its nature, and draws its conclusions apodictically, while on the other hand, it presents as rich and apparently unending a series of surprising discoveries as any observational science. Various have been the attempts to solve the paradox by breaking down one or other of these assertions, but without success. The truth, however, appears to be that all deductive reasoning, even simple syllogism, involves an element of observation; namely, deduction consists in constructing an icon or diagram the relations of whose parts shall present a complete analogy with those of the parts of the object of reasoning, of experimenting upon this image in the imagination, and of observing the result so as to discover unnoticed and hidden relations among the parts. (…) As for algebra, the very idea of the art is that it presents formulae which can be manipulated, and that by observing the effects of such manipulation we find properties not to be otherwise discerned. In such manipulation, we are guided by previous discoveries which are embodied in general formulae. These are patterns which we have the right to imitate in our procedure, and are *the icons par excellence* of algebra. (Peirce, 1931-1958, 3.363)

The teaching design cannot underestimate the need of personal meaning that drives the student's activity both when learning at school and in his every-day experience. There are two basic constitutive elements that contribute to personal meaning:

- *operational invariants* of schemata;
- a system of *convictions and interpretations.*

When teaching fails in aligning the cultural meaning with the personal one, the student accomplishes his need of meaning by having recourse to operational invariants, enhanced by beliefs and interpretations, that make him feel self-confident and self-effective in a situation of cognitive and emotional dismay. Mathematics education refers to the operational invariants as *intuitive models* because of the sense of globality, immediacy and self-evidence they convey. The system of beliefs and interpretations that intertwine mathematical knowledge, teacher and pupil is referred as *didactical contract*.

An appropriate use of natural language provides students with the cognitive and metacognitive strength to bear the strain in accessing mathematical meaning that requires to deal with a broad and composite semiotic activity. If it is disregarded because considered not rigorous nor mathematical or biased by inappropriate uses of specific language, the student can turn to inappropriate intuitive models, stereotypes and the didactical contract.

3. Students' episodes

We present accounts of episodes taken from various research studies in mathematics education carried out over the years by Bruno D'Amore and his collaborators.

Episode 1. "Like that, I understand"

At the age of 14, Italian children make an important "choice" for the future course of their studies: having finished middle school, and therefore having completed their compulsory schooling, they "decide" in which upper school they continue their education. Giovanni (I will use this fictitious name for him) is one of the many students who have been disheartened by middle school; he certainly does not shine because of his intelligence (whatever that word means) or his intuition (ditto), but he is a person who stays quietly in his seat. In middle school, especially in mathematics, he was enduring various attacks: the fact of not knowing how to solve "easy" equations, or how to calculate "simple" expressions in an orderly fashion; above all, the fact that he got lost when faced with the problem of "translating" from natural to algebraic language caused him to be branded as scholastically incapable. His destiny is sealed: he is not worthy of the luxurious desks of the grammar schools or the technical high schools and he will have to be content with the benches of a professional institute. His humble parents do not even understand exactly what has happened, but Giovanni is satisfied. He despises formalisms; above all he wants to work with his hands. All his friends respect him because at the age of 12 he knows how to take his moped apart into an infinite number of pieces and put it back together again, and because he is the only one who has a girlfriend. Going to a professional institute means finally being able to work with engines, tools and machines; goodbye cursed compositions, goodbye monstrous expressions. But, alas, he realizes very quickly that things are not exactly like that. After the first few days, his mathematics teacher, introduces polynomials to Giovanni and the whole class (in which the Giovannis are many, almost the entire group). They have to compute sizable products, without quite knowing why, take out common factors, apply rules. Giovanni is in trouble, and with him all the Giovannis. Above all he is stymied by the language used by the teacher. This language vaguely resembles Italian, but so to speak, it is more compressed (we would say: terse, condensed in its expression, with an unambiguous syntax) … The teacher turns to us seeking help. We tell her explicitly that the choice of this mathematics topic does not seem a great idea; it is not suitable for those students, but according to the compulsory government curriculum she has to develop it! We state, once and for all, that this teacher and those like her are not to blame. The blame lies with those who do not provide these teachers with cultural alternatives, thereby making them believe that polynomials etc. are the only mathematics that exists. Having made that clear, we suggest the teacher a "trick" that has worked very well elsewhere. That is, consider how mediaeval school books – those written in the vernacular – present the rules of algebra, explain the procedures, present the problem statements. On other occasions, by comparing those languages with the one we use now, the children have recognized that, in fact, our symbolism and, more generally, our method of doing mathematics~~,~~ is very much simpler. We ourselves go into the class and experience the following episode. We present mediaeval abaci, Greek geometrical algebra and especially algebraic symbolism that is wholly verbal (rhetorical algebra), and we wait for the reaction obtained in earlier testing. Not in this occasion. This time Giovanni, *that* Giovanni, blurts out exactly these words: "But why don't they do it like that anymore? Like that, I understand!".

Giovanni has been exposed to symbolic language without objectifying algebra at lower levels of generality. He missed the chance to deal with mathematical objects within his embodied space-time and kinesthetic experience, therefore he gave up his personal involvement in learning algebra.

Natural language offers Giovanni the opportunity to fill the gap between his personal need for embodied meaning and the cultural interpersonal meaning objectified by symbolic language. The introduction of rhetorical algebra on the part of the researcher provides the student with the constitutive processes of algebraic thinking. Despite the redundancy and heaviness of rhetorical language, thanks to its generative and deictic potentials, Giovanni is able to recognize the operational invariants in his personal meaning made of space-time experience, movement, feelings and emotions. At this point, the use of symbolic language can prompt the leap to higher levels of generality, by addressing treatment and conversion operations. The *referential, apophantic* and *discursive expansion* functions of natural language drive the basic semiotic operations. They allow to refer to the algebraic entities, describe and characterize them, and embed semiotic transformations in a coherent and rational discourse.

Natural language and mathematics: there is still much to consider in this relationship. Algebraic symbolism as an objective shared by society. Epistemological obstacles connected to the specific language of a discipline and to the pseudo-natural language in which the discipline is carried out or presented to the students. How many profound observations Giovanni gives us!

Episode 2. "I divided the friends among the biscuits"

Lugo di Romagna, an important agricultural center in the province of

Ravenna, Italy. A test concerning intuitive models (Fischbein, 1992) of multiplication and division, which are carefully described in D'Amore (1993a, pp. 168–185), contains the following item:

"15 friends buy 5 kg of biscuits; how many kilos of biscuits should each one receive?".

41% of the students at the end of the first year of scientific high school answer with the operation: 15 ÷ 5. An intuitive model arises. It is based on a "wise" arithmetic practice assumed as a parasitic model (Fischbein, 1992), "always divide the larger by the smaller". The experiment is also carried out in primary school, at the end of Grade 5, with an identical answer given by 67% of the students. When the primary school children are interviewed individually, one after the other, no one acknowledges spontaneously that one should (or that one could) perform 5 ÷ 15, unless the 5 kg are transformed into some large number of grams. But those who are interviewed in the first year of scientific high school react differently: all the students claim to have skimmed over this problem statement, whose semantics was sneaky, and they also admit that they were deceived by the fact that the numerical datum 15 came before 5. Someone also goes on to say that it was so easy to perform 15 ÷ 5 and that this has lowered his critical threshold. One of the cleverer students understands straight away, laughs, hits his forehead with his hand and exclaims: "Instead of dividing the biscuits among the friends, I divided the friends among the biscuits".

Fischbein (2002) defines intuitive thinking as an immediate self-evident, global, coercive form of thinking. We always urge, consciously or unconsciously, for intuitive thinking because of its immediacy, self-evidence and globality. It fosters positive emotions and a sense of well-being towards thinking and learning. Its strength can be traced back to embodied activity, which is objectified by sensorimotor experience and movement. Assigning the 15 kg of biscuits among the five friends instead of doing the other way around is perceptually immediate and self-evident. When it is 5 kg of biscuits among the 15 friends the self-evident embodied meaning evaporates. The previous operational invariant for division, with its strong embodied meaning condensed in a parasitic model (Fischbein, 2002), is thus applied. The term "division" assumes a different meaning; it has to reach a higher layer of generality. Having recourse to natural language, it is interesting how the high school student is able to visualize the interaction, in space-time, between the kilos of biscuits and the number of friends. Thereby he is aware that he is addressing the pattern of division where the dividend is greater than the divisor and he is dividing the friends among the biscuits. Such an awareness leads the student to a new objectification of the problem in natural language:

"5 kilos of biscuits must be obtained by multiplying the 15 friends by the kilos of biscuits per student".

The student is ready to use symbolic language: he writes

5 kg = 15 friends × n kilos/friend, therefore the kilos per student are 5 divided by 15.

From a structural and functional point of view the congruence between natural language, symbolic arithmetical register and the iconic register in which we can visualize the biscuits and the friends accounts for the immediacy of the case in which the number of kilos of biscuits is greater than the number of friends. The linguistic control of the problem allows the clever student to notice the incongruence between the semiotic registers mentioned above when the number of students is greater than the number of biscuits units. The *referential, apophantic* and *discursive expansion* functions are crucial in organizing the distinctive features of the problem expressed in natural language, in order to perform the correct conversion into the arithmetical language and solve the problem through appropriate conversions. For a detailed analysis of the relation between intuitive thinking and semiotics we refer the reader to Andrà and Santi (2011, 2013).

Stereotype, intuitive model, parasitic model, textual semantics, skim-reading the problem statements, … how much more could be said.

Episode 3. Metacognition in the negative: "The fact is that I don't know …"
During the long night from the 25th to the 26th March 1993, in Sulmona (Abruzzo, Italy), Vergnaud and D'Amore discussed metacognition at length. D'Amore orally reports:

> For me it was a real lesson in didactics that I will never forget. And neither Gérard has forgotten it, since each time we meet he reminds me of it. In short, he claimed that the didactic purpose of metacognition should always be expressed in the negative: what I don't know, what I don't know how to do.

In fact, at that time the Bologna research team was investigating the "mathematics of time". One of the problems asked: "Antonio, the baker, works from 9:00 PM on Tuesday to 6:00 AM on Wednesday. How many hours does he work?".

Given at different school levels, it produced a great variety of results. But a little girl in second grade (primary school), after drawing a baker kneading the dough, wrote exactly the following words: "I don't know how to solve this problem and moreover I don't know how many hours are in the night". Of course, this "moreover" was understood as a "because".

A beautiful example of individual meaning that does not intersect the cultural one. She draws the baker kneading the dough, but she does not have a precise experience of how time passes during the night. The "9:00 PM to 6:00 AM" expression is meaningless to her, outside her zone of proximal development and her embodied experience. Natural language allows her to translate and objectify the distance between time in her personal meaning and time as a cultural object. A narrative use of natural language could build a bridge for the use of sexagesimal system, she already uses to indicate time during the day, also in the transition from 9:00 PM to 6:00 AM.

This is an excellent and significant example of conceptual metacognition in the negative, but extended to a procedural context: if I knew how many hours there are in the night, then I would know how to solve the problem. Awareness, mastery, metacognition. It seems to us that this episode contains a world of possible paradigms.

Episode 4. "Ah, but it can't be done that way"

The following problem suggested by E. Fischbein (1992) is well-known: "0.75 liters of orangeade cost 2 dollars; how much does 1 liter cost?". To this, one should respond with the banal operation $2 \div 0.75$. Instead, it gives rise to a great variety of surprising reactions, even more surprising when compared with the reactions obtained with the following, apparently entirely analogous exercise: "2 liters of orangeade cost 6 dollars; how much does 1 liter cost?". The same adults and students who respond to the second question with an immediate $6 \div 2$, almost never give the above division as their answer to the first question, looking instead for more semantically controlled ways such as the proportion: $0.75 : 2 = 1 : x$. Or they fall back on fractions, noting that 0.75 is 3/4. Having brought out how the second problem could be solved by calculating $6 \div 2$, we wondered if, by analogy, the students in 7th grade would accept that for the first problem one should calculate $2 \div 0.75$. But the response of more than one student can be condensed into the protest of one young man: "Ah, but it can't be done that way". So, the analogy does not come into play: the numerical datum 0.75 destroys a possible logical analogy between the two problems. We even tried asking:

"*A* liters of orangeade costs *B* dollars; how much does 1 liter cost?", suggesting that numbers could be used in place of *A* and *B* and proposing the generic solution $B \div A$. Of course, no one proposed anything but natural numbers. When I attempted to put 0.75 (or 0.5) in place of *A*, at the moment of redoing $B \div A$, the refusal mechanism sprang up once again: the "good" operations can no longer be used, and you have to fall back on other methods.

This is a paradigmatic example of non-congruence between the specific language of mathematics regarding division operations and the arithmetical language (idem). A conversion from the specific language used in the problem statement to the symbolic arithmetical language would allow us to solve the problem with simple calculations. The proportion establishes an immediate congruence between the problem statement and arithmetical symbolism. The symbol of division replaces the term "costs" and simple conversions and treatments make the problem apparently very easy. This turns out to be a trick that hides the lack of an adequate mediated reflexive activity, in the operational phase, to objectify division. The lack of a robust embodied objectification of division leaves us with a shallow and weak reification of this arithmetical operation and any semiotic transformation is meaningless. On the basis of an embodied meaning it is reasonable to foster a leap to higher levels of generality for division. The use of conversion and treatment with the aid of the discursive functions of natural language is at this point significant. Otherwise, students and teachers are left with stereotypes, prisoners of the strength of intuitive models: under these conditions resorting to proportions can be interpreted as the *formal delegation clause* of the didactical contract (D'Amore, 1999; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010; Narváez Ortiz, 2017). The structure of the problem is identical to the one in example 2, by substituting the kilos with the dollars and the friends with the liters. The same remarks apply to the role of natural language.

Stereotypes, mechanisms of analogy blocked by particular choices of numerical data, the role of data in the solution of a problem. Furthermore, intuitive models of division: indeed, if dividing means sharing out or containing, what could "*divide by 0.75*" possibly mean? And thus, once again, language.

We continue with other interesting verbal contributions (D'Amore, 1993c).

Episode 5. "The smallest number in the world"

Let us suppose we ask a second-grade student: "What is the smallest number in the world?". Setting aside the reasonableness of the question and the formality of the linguistic register used, about which we will speak later, the answer "Zero" would be considered an optimal result. But what would we think if the same answer was given by students in eighth grade (13-14 years old), after they had come to know the set Z of the integers? And if the same answer was given by students in the final secondary school years, students who already knew mathematical analysis? And by fourth year undergraduates in a mathematics degree course? It would not be a big surprise if the question was asked in the particular linguistic and mathematical environment that is defined in D'Amore and Martini (1998) as the "natural context", i.e. in a context of natural and not formal language.

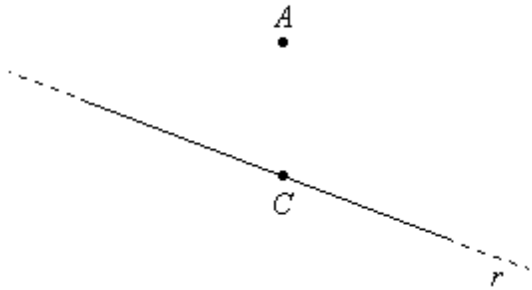
A series of questions of various kinds is posed in natural, colloquial language, by using the linguistic register of everyday language, totally ignoring the formal language that is normally used when mathematics is done in the classroom (and that is the reason behind the linguistic formality of the question given above). Among all these questions we require the use of natural language. In this way we create, subtly but apparently very strongly, an environment that we call the "natural context", formed by everyday language and natural numbers. At this point, the response "Zero" to the preceding question becomes clear. (It might be interesting to know that many students in the final secondary school years who have studied mathematical analysis and very many fourth-year mathematics undergraduates answered writing "$-\infty$". Perhaps it should also be said that the fourth year of the mathematics degree course where we conducted this experiment was not housed in an Italian university). But the story does not end here. The next question was: "Which is smaller, –3 or +2?". This question breaks out of the natural context … And nevertheless, there are many of the students who answer "+2" here, while leaving "Zero" for the preceding question. Others, however, go back and modify. (We must also say, in the interests of truth, that many students know that, in view of the existence of the negative numbers, the answer "Zero" is incorrect and is not good enough, but they do not know what to write. Those who reach the point of writing, in words, "doesn't exist", "there's no such thing", or something similar, are in a tiny minority, even among the primary school teachers interviewed).

The notion of "big" and "small" is exactly at the point where personal/embodied meaning and cultural/disembodied meaning crash against each other. *Small* in what sense? In terms of absolute value, in terms of number ordering, or in terms of limit? "$-\infty$" is big or small? The embodied notion of big and small needs to be transformed at a higher level of generality in the context of numbers. Furthermore, the structure of the semiotic register undergoes important changes that hinder an invariant notion of big and small as we move from natural numbers to integers. The presence of the plus and minus signs puzzles the students and mixes up the possible meanings of "big" and "small" mentioned above. The *referential*, *apophantic, discursive expansion* and *discursive reflexivity* functions in the context of number systems allow us to designate numbers in the different number systems, formulate claims regarding "big", "small" etc., organize a discourse and recognize the validity, the mode and the status of the claims. The coordination of natural language, specific mathematical language, and symbolic language outlines the correct meaning of *big/biggest* and *small/smallest* "number in the world".

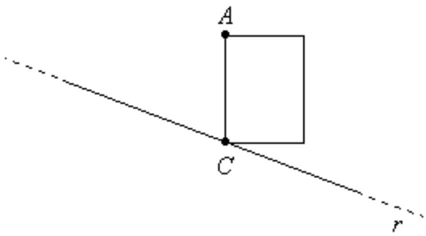
Here one might reflect upon the reasonableness of contexts, upon the influence that these have on mathematics classroom, upon artificial environments, upon the blend of natural and mathematical language, and once again upon stereotypes and intuitive numerical models.

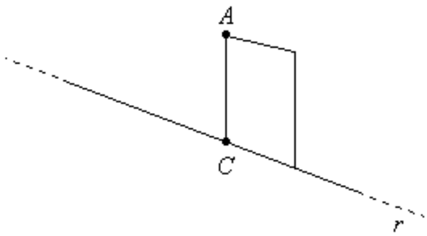
Episode 6. "My God!"

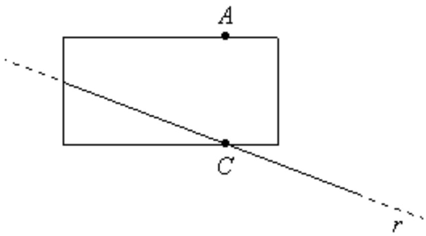
Here is the account of an experiment carried out in a foreign country (outside of Italy) with upper secondary school students (pupils aged 15 to 20) (Gallo, Amoretti & Testa, 1989, p. 14): "Draw the rectangle *ABCD* with side *BC* along the straight-line *r*".

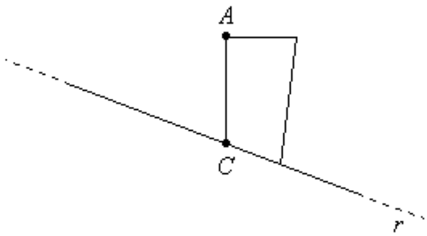


And here are some of the responses (reproduced at a greatly reduced scale: the actual originals are available for those who would like to see them).









One of the mathematics teachers simply said: “My God!”, when we showed him the results obtained in *his* class. The discussion of the causes that underlie these results is well carried out in (Gallo, Amoretti, Testa, 1989, p. 14). But, in addition, we wanted to study the relationship between these responses and the conceptual difficulty of understanding the sense of the request in all its complexity, the problem of the use of stereotypes with regard to geometric figures, according to which rectangles have horizontal bases etc. In particular, on this occasion, our discussion with these teachers covered natural language and the non-neutrality of the language in which geometry is done and geometrical problems are presented.

Objectification of geometrical figures is usually embodied in the perceptual space of the student. The individual’s experience of space is strongly influenced by the fact that we are immersed in gravity. He feels a sense of proximity towards geometrical entities when semiotics means of objectification recall the vertical structure of our experience. The specific language of geometry and natural language tend to reinforce the relationship between the positioning of figures in the geometrical space and the embodied experience of physical space: “base”, “height”, “the horizontal and vertical lines”, for example. When the individual meaning of geometrical figures has to be aligned with their cultural meaning, the student lives a rupture in neglecting a privileged position according to the verticality of physical space. The use of linguistic terms such as “horizontal” and “vertical”, “base” and “height” do not allow to objectify the geometrical object at higher levels of generality. The use of natural language hinders an appropriate learning of geometry and can result in stereotypes and parasitic intuitive models. The solution of the problem requires a leap to higher levels of generality that allow the students to go beyond their perceptual experience of space. The solutions presented above show the strength and the need for embodied meaning on the part of the students. In fact, the students quit any logical control of the problem and give nonsense answers, a behavior typical of the didactical contract. The answers are nonsense as regards the institutional mathematical meaning, but they make sense at their personal level. The students are aware that their figures are not rectangles, or they do not accomplish the request of the problem, but they make sense in their effort, trapped in a parasitic strong model, to attend the request of the problem. The challenge of teaching and learning mathematics is to push students towards higher levels of generality without losing the core of their individual embodied experience. Once again, natural language can be a resource to objectify figures in the geometrical space starting from the physical one.

This is a significant example that questions our understanding of perception. Often one believes that perception is just an intentional movement of consciousness towards a physical or mental object that exists per se. Instead the object’s mode of existence is entangled with the way our intentional act attends it. The problem for the student is to attend to the figure according to the constraints of the problem. There is no a priori rectangle that the students are unable to see. There are different modes of existence of the rectangle corresponding to the different intentional ways to attend them. The point is that the students’ intentional way of referring to the geometrical figure is different from the cultural and general one required for the solution of the problem. Furthermore, the student’s way of attendance is tainted by schemes, beliefs and interpretations. As some of the above drawings show, some students are convinced they have to connect points A and C to form a side of the rectangle. The educational issue is how to “domesticate” the student’s eye to attend geometrically the drawing proposed in the problem statement, i.e., borrowing Radford’s terminology, how to transform the biological eye in “the eye as a theoretician”. For an in-depth analysis of this topic we refer the reader to Radford (2010). The eye is culturally "domesticated" also with the help of natural language that can support the transition from the experience of the physical space to the objectification of the geometrical one. When moving towards higher levels of generality, the student broadens the meaning of terms such as "height", "vertical", "bottom" and "top" with terms that objectify the rectangle independently from our physical perception of objects. For example, the term "height" becomes the "side" of the rectangle and the term "vertical" becomes the "angle between one of its sides and a straight line". When the students are able, supported by the natural language, to imagine the rectangle as a specific relation between four segments and all its possible positions in the plane, the above problem becomes immediate.

In terms of representation registers there is no direct correspondence – moreover such a correspondence is biased by a strong intuitive model of the rectangle – between the problem statement in natural language and the geometric figural representation register. The correct conversion would make the problem extremely simple. The discursive expansion and the discursive reflexivity are crucial in erasing the bias mentioned above, recognizing the distinctive features of the rectangle in the context of this problem, and establishing the correct conversion. This is a good example that shows that the semiotic control is one of the possible and necessary learning in mathematics (Bolondi & Fandiño Pinilla, 2008). Is it a mathematical, a semiotic or a linguistic issue? Where do we draw the boundaries between the three domains?

Episode 7. "You can't do that!"

Very rapidly: primary school, we propose an impossible problem. The children all answer by simply adding the numerical data in the statement of the problem (a similar thing is reported in D'Amore, 1993b). We explain to the children that the problem is impossible. Nervous sniggers; the most impetuous youngster objects: "Ah, but you can't do that! If the problem is impossible you should have said so. Our teacher does". Yes, this is certainly the didactic contract and the transparency clause. Yes, this is certainly the *Topaze effect* (Brousseau, 1997; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010; Narváez Ortiz, 2017). But it also concerns the general model of a problem and stereotypes (Zan, 1991-1992).

Impossible problems, also known as the *"age of the captain effect"* (Chevallard, 1980; D'Amore, 1999), are effective in unveiling the student's beliefs, interpretations and expectations that contribute to their personal meaning regarding mathematics. Here, a problem in mathematics *must have* a solution, possibly obtained after some calculation. The teacher's mathematical practice has been reified by the students into a strong operational invariant: "Given a problem, I have to find the solution". When this expectation is deceived the students react: "You can't do that!": Brousseau's didactical contract at its climax. Natural language can support new narratives that trigger forms of metacognition in which the individual can recognize the beliefs and interpretations that trap their mind and find emotional and cognitive strategies to overcome them.

Episode 8. "When the signs are different, you can't simplify"

We and a couple of friends who teach at the professional institutes in Bologna (Italy) are analyzing the "hidden curriculum". The basic idea is that the inappropriateness and the incoherence of the students' responses are sometimes global rather than local. In other words, the student sometimes makes a mistake because he is following some rule of his own that he has used for years. At times it has worked, and so he has expressed, generalized and accepted it. After that, he stubbornly follows it and does not understand why the teacher sometimes accepts it and sometimes not. In the context of algebra, we apply the "Pretend you are a teacher" trick. The student has to indicate which simplifications are correct and which are not from a list. One student, for example, recognizes that the simplification:

$$\frac{\cancel{x^2}+5}{\cancel{x^2}-5}$$

is incorrect, in short: you can't do that. Bravo, that's right. But, when asked why, he responds: "Because there are two different signs". This raises a doubt in our minds, and so we propose:

$$\frac{-\cancel{5}}{+\cancel{5}}$$

You can't do that either, *for the same reason*. Thus, the student has created for himself a rule described in words in a rather ambiguous fashion (yes, we know: that's a euphemism); on some occasions it works well, and the teacher praises him, on other occasions it does not, and he does not understand the reason why. The student is locally coherent, as he follows this rule of his in a context in which it is globally incoherent. We understand this, he does not. All he understands is that something is not working, but he does not know how to explain the reason to himself. The set of rules, both those that are correct and those that are not (from an adult point of view), constitutes a "hidden curriculum" that is the true paradigm of the student's algebraic behavior.

Another example that shows how learning results in a shallow understanding of mathematics without an underlying mediated reflection. The student, under Duval's cognitive paradox, is compelled to identify the mathematical object with the algebraic semiotic representation. The unavoidable lack of meaning is filled with operational invariants derived from the belief that mathematical meaning lies in some kind of symbolic manipulation. This behavior is driven, within the didactical contract, by the *clause of formal delegation* and the *clause of formal justification demand*

(D’Amore, 1999; D’Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2010; Narváez Ortiz, 2017). A linguistic control of the situation through the *discursive expansion* and *discursive reflexivity* functions could be an effective instrument to overcome the cognitive paradox and ascribe mathematically correct meaning to algebraic fractions. Too often, in high school, algebra is introduced immediately through symbols without the support of the discursive functions of natural language.

4. Conclusions

Mathematical thinking and learning is one of the most challenging and fascinating intellectual adventures. Nevertheless, it requires cognitive and metacognitive skills that allow students to master the broad and composite semiotic activity beneath the development of mathematics. We have shown the role that the natural language can have in mastering the semiotics that characterizes mathematical thinking and learning.

Natural language in TKO, synchronically used with other semiotic means of objectification, plays a key role in driving reflexive mediated activity. It entails a set of possibilities that are the indelible basis for the recognition of fixed patterns of reflexive activity, thus accessing higher layers of generality. The discursive functions of natural language (in a structural and functional framework) are crucial, as a metacognitive support, in recognizing the distinctive traits of mathematical objects, in expanding reasoning and assigning validity and status to claims. Natural language is a pivotal representation register for treatment and conversion operations.

Natural language can hinder the learning of mathematics when it discards the pupils personal meaning, made of embodied experience, feelings, emotions, interpretations, in its effort to encounter the cultural/institutional one. It is most interesting to see how students use the everyday language and feel no need to fall back on artificial or fabricated languages, even when they want to talk about mathematics. Could it be that this is an entirely adult need? If so, then this should become more expected and it should prove the Italian governmental primary school mathematics national curriculum (dating back to 1985, today no longer in force) to be correct, where they say: “(…) natural language has expressive richness and logical potential that are suited to the needs of learning”.

Natural language is the privileged context for communication as far as each individual is concerned. Denying this hinders the interpretation of students’ responses. Admitting it always provides a key to an extremely interesting reading. For many years we have been experimenting with the opportunity of doing as much mathematics as possible in Italian and not in *mathematics jargon* (D’Amore, 1993c). Our students already have a hard job using their everyday language well; demanding additional sophisticated subtleties can be harmful (even more than pointless). Many other researchers agree with this position, for example Hermann Maier, who has devoted considerable efforts to this issue (see, for example: Maier, 1996). The fact is that some teachers think that natural language is not suitable for doing mathematics. Of course, our objectives must also include that of *arriving* at a perfect understanding of the use of mathematical language; but as an *educational objective*, not as a prerequisite. And besides, especially with younger students, more than doing mathematics, we should be talking about mathematics.

All of us – and this is a law of the pragmatics of human communication – along with the messages we send out consciously, also provide messages that we do not want to provide but which the intended hearer of the message receives, with more or less explicit awareness. This takes place even in the most beautiful and perfect mathematics lessons in the world. Knowledge of the intuitive models we are inducing, perhaps unconsciously, in the students is of the greatest importance when we seek to understand what are the conceptual schemes that the students themselves make of the models in place of those we wanted to provide. The matter is rather complex, and we refer you to D'Amore and Frabboni (1996) for a much more exhaustive treatment. The teacher – who simply believes that the model put forward in the lesson coincides with the one formed in the head of the students to whom it is communicated – is wrong, highlighting quite a lot of naivety. Knowing that matters of this kind are problematic removes astonishment towards certain answers of our students.

Stereotypes are just unavoidable. Combating them is one of the main jobs of the teacher. They are sneaky mental creatures always lying in wait. It is incredible how it only takes two or three examples that agree in some insignificant way before the student generalizes them in operational invariant, creating stereotypes. Culturally speaking, the student is a conservative who tends to jump at forming rules and models for everything: "So, every time you get zero it means that the equation is indeterminate": claimed a student one day when we had worked and discussed a single example of an equation with him. A single example, and he had already created a rule for all cases. If we had not immediately worked out a counterexample for him, he would have registered the rule, with easy-to-imagine harmful effects on the next assignment. We observe, *en passant*, that this boy is an intelligent, critical young man, always ready to discuss, object and quibble. Except in mathematics, where he immediately forms stereotypes in order to reassure himself. Ah, what an image of mathematics he must have made over the years. No, we are not straying from the subject: the image of mathematics, the image of oneself doing mathematics, rules to follow without motivation (apart from that of getting a good grade), stereotypes, they all go hand in hand. They are different – but not all that different – facets of the same problem.

Teaching mathematics needs to know mathematics well and in depth. But to have success in the process of learning mathematics on the part of one’s own students, at whatever level of schooling, perhaps knowing mathematics is no longer enough. One needs to know the operating mechanisms of that complex machine that allows learning to take place. Since in the current state of knowledge this is impossible we ought at least to know those aspects that reach the surface, study them, understand them. Conducting research on these aspects is the best way to come to grips with them.

Acknowledgements
The authors would like to thank the reviewers for improving the original version of the article and PhD Maura Iori for thoroughly editing the manuscript and for her critical contributions that enhanced the theoretical framework.

References

Andrà, C., & Santi, G. (2011). A semiotic characterization of intuitions. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME 35: Developing mathematical thinking* (Vol. 4, pp. 113–120). Ankara, TK: Middle East Technical University.

Andrà, C., & Santi, G. (2013). Intuitive thinking in a context of learning. In A. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the Psychology of Mathematics Education: PME 37: Mathematics learning across the life span* (Vol. 2, pp. 25–32). Kiel, Germany: IPN.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D’Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 267–299. http://www.luisradford.ca/pub/56_Relime_semiotics_06PP157313.pdf

Bolondi, G., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). Molteplici aspetti dell’apprendimento della matematica. In B. D’Amore & S. Sbaragli (Eds.), *Proceedings of the XXII Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica, Castel San Pietro Terme, 7-8-9 novembre 2008: Didattica della matematica e azioni d’aula* (pp. 129–131). Bologna: Pitagora.

Brousseau, G. (1997). *The theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

D’Amore, B. (1993a). *Problemi: Pedagogia e psicologia della matematica nell’attività di problem solving*. Preface by Gérard Vergnaud. Progetto Ma.S.E., vol. XA. Milano: Angeli. [See also: D’Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefaces by Gérard Vergnaud and Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index]. [See also: D’Amore, B. (1997). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Madrid: Editorial Sintesis].

D’Amore, B. (1993b). Il problema del pastore. *La vita scolastica*, *46*(2), 14–17.

D’Amore, B. (1993c). Esporre la matematica appresa: Un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 289–301. [See also: D'Amore, B. (1996). Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme. *Journal für Mathematik Didaktik*, *17*(2), 81–97].

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Preface by Colette Laborde. Bologna: Pitagora. [See also: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prefaces by Guy Brousseau, Luis Rico Romero, Colette Laborde. Bogotá: Editorial Magisterio]. [See also: D'Amore, B. (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. Prefaces by Guy Brousseau, Luis Rico Romero, Colette Laborde and Ubiratan D'Ambrosio. São Paulo: Livraria da Física].

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, *15*(2), 150–173.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, epistemologiche e concettuali della didattica della matematica*. Preface by Guy Brousssau. Bologna: Pitagora. [See also: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Prefaces by Guy Brousseau and Ricardo Cantoral. México DF, México: Reverté-Relime].

D'Amore, B. (2010). Figurative arts and mathematics: Pipes, horses and meanings. In V. Capecchi, M. Buscema, P. Contucci, & B. D'Amore (Eds.), *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts. Mathematics and Society* (pp. 491–504). Dordrecht Heidelberg London New York: Springer.

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* [Special Issue] (pp. 151–171). *Isonomia-Epistemologica: Online philosophical journal of the University of Urbino "Carlo Bo"*. http://isonomia.uniurb.it/epistemologica

D'Amore, B. (2018). Puntualizaciones y reflexiones sobre algunos conceptos específicos y centrales en la teoría semiótico cultural de la objetivación. *PNA*, *12*(2), 97–127.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2008). The phenomenon of change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education: Proceedings of the Conference of Five Cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno* (pp. 13–22). Nicosia: University of Cyprus.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la didáctica de la matemática: Theoretical reflections on the basis of the onto-semiotic approach to the didactics of mathematics. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23–26 marzo 2017. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefaces by Raymond Duval and Luis Radford. Bologna: Pitagora. [See also: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática*. Prefaces by Raymond

Duval, Luis Radford and Carlos Vasco. Bogotá: Masgisterio]. [See also: D’Amore, B., Fandiño Pinilla. M. I., & Iori, M. (2015). *Primeiros elementos de semiótica Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Prefaces by Raymond Duval, Luis Radford, Carlos Vasco and Ubiratan D’Ambrosio. Sao Paolo: Editora Livraria da Física].

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la “paradoja cognitiva de Duval”. *Relime, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177–212. doi: 10.12802/relime.13.1822. http://www.clame.org.mx/relime.htm

D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del “contratto”*. Preface and postface of Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D’Amore, B., & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

D’Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9–38.

D’Amore, B., & Martini, B. (1998). Il “contesto naturale”: Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *21A*(3), 209–234. [In Spanish: 1999, *Suma*, *11*(30), 77–87].

D’Amore, B., & Sandri, P. (1996). Fa’ finta di essere… Indagine sull’uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19A*(3), 223–246.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne: Peter Lang. [See also : Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del Valle].

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349–382.

Duval, R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 585–619.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 39–61). Rotterdam: Sense Publishers.

Ernest, P. (2006) A semiotic perspective of mathematical activity: the case of number. *Educational studies in mathematics, 61(1-2)* 67-101.

Fischbein, E. (1992). Intuizione e processo informativo nell’attività matematica. In B. D’Amore (Ed.), *Proceedings of the VI Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica: Matematica a scuola: teorie ed esperienze* (pp. 51–74). Bologna: Pitagora.

Fischbein, E. (2002). *Intuitions in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht: Springer Netherlands.

Gallo, E., Amoretti, C., & Testa, C. (1989). *Sul ruolo dei modelli nella risoluzione dei problemi di geometria: controllo ascendente e discendente*. Quaderno n. 7. Ricerche di didattica della matematica. Torino: CNR – NRD di Torino.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Husserl, E. (1931). *Ideas: General introduction to pure phenomenology* (W. R. B. Gibson, Trans.). New York: Macmillan Company. (Original work published 1913).

Ilyenkov, E. V. (1977). The concept of the ideal. In AA. VV. (Eds.), *Philosophy in the USSR: Problems of Dialectical Materialism* (pp. 71–99). Moscow: Progress Publishers.

Maier, H. (1996). Apprendimento della matematica: Difficoltà e modalità per superarle. In B. D'Amore (Ed.), *Atti del Convegno del Decennale* (pp. 27–48). Bologna: Pitagora.

Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 181–189.

Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected papers of Charles Sanders Peirce* (Vols. I-VIII) (C. Hartshorne, P. Weiss, & A. W. Burks, Eds.). Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237–268.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, *22*(2), 14–23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2004). La généralisation mathématique comme processus sémiotique. In G. Arrigo (Ed.), *Atti del Convegno di didattica della matematica* (pp. 11–27). Locarno, Switezerland: Ed. Alta Scuola Pedagogica.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 39–65.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215–234). Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 2–7.

Radford, L. (2016). Mathematics education as a matter of labor. In M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory.* Section: Mathematics education philosophy and theory. (P. Valero and G. Knijnik, Editors). Singapore: Springer. doi: 10.1007/978-981-287-532-7_518-1

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(77), 285–311.

Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado*. Madrid: Aguilar.

Zan, R. (1991-1992). I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *14*(7), 659–677; *14*(9), 807–840; *15*(1), 39–53.

A century of Hispanic bibliography on Peirce: A conceptual and bibliometric study 1891–2000

Fernando Zalamea
Universidad Nacional, Bogotá, Colombia

Abstract. *The present study shows a review summarizing the contributions of academic Peircean studies developed by Hispanic authors from 1891 to 2000. According to Peirce's classification of sciences, a map of the field has been outlined, by illustrating geographic and thematic distributions, as well as the quantity and quality of the various contributions (papers, books, Ph.D. theses). Moreover, different relational figures are shown in order to exhibit diagrammatically some outstanding features of the field in a Peircean vein.*

Keywords: Peirce, bibliography, Hispanic world, twentieth century.

Sunto. *Presentiamo una rassegna sintetica degli studi su Peirce elaborati nel mondo ispanico nel periodo 1891–2000. Seguendo metodi peirceani (classificazione triadica delle scienze, diagrammi visuali), delineiamo il panorama, mostriamo distribuzioni geografiche e tematiche, valutiamo la quantità e la qualità dei contributi (articoli, libri, tesi di dottorato), e introduciamo diverse nuove figure con relazioni di incidenze che evidenziano tratti originali della bibliografia.*

Parole chiave: Peirce, bibliografia, mondo ispanico, ventesimo secolo.

Resumen. *Presentamos una reseña sintética de las contribuciones en español a los estudios peirceanos en el periodo 1891–2000. Siguiendo la clasificación peirceana de las ciencias, dibujamos un mapa del panorama, exhibimos distribuciones geográficas y temáticas, y calibramos la cantidad y la cualidad de las diversas contribuciones reseñadas (artículos, libros, tesis doctorales). Siguiendo los énfasis peirceanos en el interés de una metodología visual, introducimos varias figuras con relaciones de incidencia originales para enfatizar diagramáticamente algunos rasgos centrales de la bibliografía.*

Palabras clave: Peirce, bibliografía, mundo hispánico, siglo veinte.

1. Introduction

In this review, we present a brief overview of a century of Hispanic bibliography on Peirce. Here, *bibliography* refers to a collection of printed texts or Ph.D. theses, leaving aside conferences, circulated manuscripts, web files, or Master and Bachelor theses. And, *Hispanic* alludes to the work in Spanish language produced by Hispanic authors, belonging to Spain or Latin America. Texts in other languages, particularly English works written by

Hispanic authors and all sorts of translations of Peircean primary or secondary bibliography into Spanish, have not been included. By restricting the bibliography *on Peirce*, we also exclude texts regarding generic forms of pragmatism, and the works on other key figures, such as James, Dewey, Royce, etc. In this sense, the *Hispanic bibliography on Peirce* (HBP) mainly reflects what the Hispanic world has written (and made public) on Peirce: its reception, understanding, interpretation and creative renovation, all under the peculiar perspectives provided by both Spain and Latin America.

The material used for this study consists of the bibliography that the Grupo de Estudios Peirceanos (Universidad de Navarra) has collected since 1990. The HBP was assembled inside the Grupo de Estudios Peirceanos and has been a result of the hard work of Jaime Nubiola and Sara Barrena. The HBP is a unique piece from a non-English environment, because it usually includes *all* the written texts on Peirce in Spanish, in a comprehensive manner, since its inception (1891).

The material examined here includes 140 entries (97 articles, 25 books, 10 Ph.D. theses and 8 book introductions). We start by presenting a survey from two complementary points of view: firstly, a quantitative perspective, where the evolution of the HPB is recognized (types of articles, books, theses, introductions), both in time (chronological frames) and space (countries); secondly, a qualitative perspective, where the themes and interpretations are analyzed – underlining both advances and obstructions –, and the specific HBP knots, polarities and agglutinations are studied. The study of Nubiola y Zalamea (2006) entitled *Peirce y el Mundo Hispánico: Lo que C. S. Peirce Dijo Sobre España y lo que el Mundo Hispánico ha Dicho Sobre Peirce*, provides detailed information about the main topic of this review.

2. Chronotopes of the HBP

In Bahktin's sense, a *chronotope* consists of a spatio-temporal matrix, or context, where cultural readings/interpretations can act. In Figure 1, we provide a first chronotope of the HBP – emphasizing both genres and deepness of works – where, in a given text, we understand "mention" as an isolated reference to Peirce (level of a mark), "partial study" as a discrete set of references to Peirce (level of an icon or index), and "specific study" as a continuous web of references (level of a symbol).

	1883-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1995	1996-2000	Total
Articles (mention)	1	-	1	-	-	2
Articles (partial study)	5	1	7	8	11	32
Articles (specific study)	4	1	9	20	29	63
Books (mention)	2	-	-	-	-	2
Books (partial study)	0	0	4	5	5	14
Books (specific study)	0	1	2	2	4	9
Ph.D. theses (partial study)	0	0	4	3	0	7
Ph.D. theses (specific study)	0	0	0	0	3	3
Expository introductions	0	3	1	0	0	4
Critical introductions	0	1	2	0	1	4
Total	12	7	30	38	53	140

Figure 1. HBP: chronological classification by genres.

In geometrical terms, the HBP is mainly determined by *singularities*, in contrast with what we may call *smooth* paths: It conforms a sort of broken surface with vertices, where individual efforts prime, without normalizing forces provided by stable schools in time. The HBP starts around a *first major singularity*: the reception of Peirce's work by Ventura Reyes Prósper, a well-informed Spaniard mathematician who started a correspondence with Peirce, at the end of the nineteenth century. [Reyes Prósper 1891a, 1891b, 1892] show the interest of Peirce's mathematical logic, and provide accurate technical comments. These initial readings represent an outstanding singularity along the HBP, since almost a century will pass without any further Hispanic comments on Peirce's mathematical logic. Beyond Reyes Prósper, between 1891 and 1969, we find in the HBP only 3 articles which partially study Peirce, 4 other articles with specific studies and 2 books with partial mentions. It can thus be seen as a poor reception, if we compare it, for example, with James and Dewey's reception, whose influence in Latin American education was notorious along the twentieth century. [Ferrater Mora 1944, 1955], which deal with Peirce's architectonics, can be easily judged as the best Hispanic articles on Peirce in the long period 1891–1969.

The decade 1970–1979 maintains the *status quo*, with a low-level production that, in general, does not use the English secondary bibliography already available. In Argentina some translations of Peirce's texts give rise to expository introductions and a critical introduction [Negro 1978], while the first book on Peirce written in Spanish appears [Tordera 1978]. Tordera's book consists of its Bachelor thesis (Universidad Central de Barcelona), and presents the first careful reading in Spanish of the *Collected Papers* and of the main secondary bibliography (in English and Italian). Although Tordera reiterates the myth of Peirce's "contradictions", the text provides the first general viewpoint in Spanish of Peirce's ramified system.

The decade 1980–1989 constitutes instead the *rising decade* for the HBP. Thirty entries in the HBP emerge in this period, more than what was previously produced in a century: 8 articles with partial studies on Peirce, 9 specific articles, 4 partial books, 2 specific books, 4 partial Ph.D. theses, 1 expository introduction, 2 critical introductions. Subsequently, Reyes Prósper, [Castañares 1985, 1986, 1987a, 1987b, 1988a, 1988b, 1989] provides the *second major singularity* in the HBP. Building on an important Ph.D. thesis specifically related to Peirce (until 2000, the most achieved one produced in Spanish), Castañares' work provides careful historical and philosophical perspectives on sign related problems, emphasizing in particular the role of interpretants and expanded meaning, as well as a fundamental integration of logic, semiotics and metaphysics in Peirce's thought. Thanks to Castañares, the year 1985 can be understood as a pivotal year in the HBP, even if the *annus mirabilis* should be 1988, where the first careful translations of Peirce into Spanish (with nice introductions: [Castrillo 1988], [Vericat 1988]) emerge: some original interpretative essays ([Herrero 1988], [Pérez Carreño 1988a]), a monograph [Pérez de Tudela 1988], an outstanding Ph.D. thesis [Ortiz de Landázuri 1988], and the consolidation of Castañares' series of articles on Peirce and semiotics. This peculiar chronotopical conjunction of a community of researchers (1988, Spain) constitutes a well-defined *threshold* from which the HBP will build in the next decade. Although the kernel of developments in the decade 1980–1989 can be situated in Spain, the HBP also expands simultaneously in Latin America: [Beuchot 1984] inaugurates a long line of research between Peirce and medieval scholastics; [Magariños de Morentín 1983] creates original examples, diagrams, schemes and tables to explain Peirce's classifications of signs; [Battistella 1983] and [González Ochoa 1986] explore the relation signs-medium-mediations; [Sercovich 1987] approaches logic and semiotics.

On the basis of the threshold attained at the end of the eighties, the HBP accelerates in the periods 1990–1995, 1996–2000 (see Figure 1). The period 1990–2000 may be called the HPB *professionalization* or *normalization* decade, by profiting from the Ph.D. level of the main contributors of the period: Beuchot (5), Castañares (6), Castillo (3), Castrillo (3), Fontrodona (4), Nubiola (16), Rivas Monroy (4), Zalamea (6). The work of Jaime Nubiola rises clearly over his colleagues in the normalization period, by profiting both from his amazing productivity and from the institutionalization of his Grupo de Estudios Peirceanos at the Universidad de Navarra. Around Nubiola the *third major singularity* of the HBP emerges, a situation that we may well call a “geometric” paradox of the HBP: The fact that its main *stabilization* web emerges from the work of a *single* scholar. In fact, Nubiola’s work expands around a triple ramification that helps to fix a steady route in the decade: (a) the study of Peirce’s trip to Spain (1870), and the review of all that Peirce wrote about Spain [Nubiola 1992, 1993, 1994c]; (b) the reception of Peirce’s work in the Hispanic world [Nubiola 1992, 1994c, 1995a, 1997(Cobo), 1997a]; (c) the value of Peirce’s thought for a pragmatist renovation of analytical philosophy, and, in a more extended way, for a broad “philosophy of life” [Nubiola 1991, 1994a, 1994b, 1995b, 1996b, 1998b, 1999].

Moreover, from the perspective of the scientific community, Nubiola launches some journal numbers devoted to Peirce (*Anuario Filosófico*, *Analogía*) [Nubiola 1996a, 1998a], creates the concept of *Hispanic bibliography on Peirce* (HBP) (at the same time with [Castañares 1992b]), and begins to accumulate the material base for the HBP at the Grupo de Estudios Peirceanos (founded in 1994). It is impossible here to mention in detail many of the other valuable contributions of other scholars in the decade 1990–2000. For a detailed review on this topic see our monograph *Peirce y el mundo hispánico* (*op. cit.*).

Figure 2 shows a reversed chronotope for the HBP, where emphasis is now focused on the geographical origin of the texts.

	1883-1969	1970-1979	1980-1989	1990-1995	1996-2000	Total
España	9	1	21	29	31	91
Uruguay	1	0	2	1	1	5
Argentina	1	4	3	0	6	14
Puerto Rico	1	1	0	0	1	3
México	0	1	3	5	4	13
Venezuela	0	0	1	0	0	1
Colombia	0	0	0	3	9	12
Guatemala	0	0	0	0	1	1
Total	12	7	30	38	53	140

Figure 2. HBP: chronological classification by geographic origins.

In the period 1990–2000, the HBP’s principal production clusters around Spain, as opposed with fewer entries in Latin America (a tendency that has oscillated, and now tends to an equilibrium Spain/Latin America in the new millennium). On the other hand, as can be seen in Figure 2, a steady increase of entries occurs in the HBP as we approach the year 2000: 140 entries subdivided in 12 (1883–1969), 7 (1970–1979), 30 (1980–1989), 38 (1990–1995), 53 (1996–2000). The five-year period 1996–2000 is, by far, the most productive one in the HBP (considered until 2000: the next period 2001–2005 is also a prominent one). Three characteristics are particularly visible with respect to previous chronological stripes: an augmentation of specific articles on Peirce (29 in the five-year period 1996–2000, *versus* 20 in the six-year period 1990–1995), specific books (4 *versus* 2) and specific Ph.D. theses (3 *versus* 0). Among the themes studied in the specific articles, according to Peirce's classification of sciences, we can find:

- *mathematics* ([Legris 1996], [Soto, Osejo, Caballero 1996], [Zalamea 1997a, 1997b], [González 1999], [Oostra 2000], [Poveda 2000]);
- *phaneroscopy* ([Zalamea 2000b, 2000c]);
- *history of logic* ([Beuchot 1996], [Castrillo 1997, 1998], [Cobo, Nubiola 1997]);
- *semiotics* ([Andacht 1996], [Castañares 1996], [Forastieri-Briaschi 1996], [Llamas 1996], [Rivas Monroy 1996a, 1996b, 1997], [Caballero 1997], [Castañares 1999]);
- *pragmatism* ([Ortiz de Landázuri 1996], [Polanco 1996], [Nubiola 1997a, 1997b], [De Miguel 1998], [Morales 1999]);
- *abduction and creativity* ([Aliseda 1998], [Beuchot 1998], [Génova 1996], [Nubiola 1996b, 1998b, 1999]);
- *cognitive science* ([Gomila 1996]);
- *managing* ([Fontrodona 1996b, 1997]);
- *religion* ([Carbonell 1996]);
- *psychoanalysis* ([Azaretto 1997], [Lutzky 1998]).

For a longer and more careful treatment of the bibliography, particularly for partial entries related to Peirce, we refer again to our *Peirce y el mundo hispánico* (*op. cit.*).

It is not our intention here to look beyond the year 2000, but from 2001 the HPB has grown even higher, healthfully challenging, thanks to some of the rising stars of the HBP: Sara Barrena (creativity), Douglas Niño (abduction/induction), Arnold Oostra (mathematical logic), each one with first class works on Peirce's heritage and interpretation, not only in the Spanish-speaking scientific community, but also on the international scene.

3. Correlative spectrum of the HBP

In what follows, we will consider the HBP from a *relational perspective*, where both analysis and synthesis play relevant roles. On the one side, we will describe the topography of the Peircean themes specifically studied in the HBP. Thanks to a series of key words associated *locally* to each entry in the bibliography and thanks to the study of correlations of those key words along the *global* spectrum of the HBP, we obtain relational diagrams (trees, webs, maps) (see Figures 3-5), where we can underline both features and voids in the reception of Peirce's thought in Spanish. On the other side, we can analyze the internal Peircean topography, and point out some of its main knots and polarities. The list of 140 entries of the HBP has been in fact carefully dissected, by providing for each entry: (a) a short description of the text, (b) a brief critical discussion, (c) some Peircean key words (following Peirce's internal classification of sciences), (d) some additional external key words. For details, see *Peirce y el mundo hispánico (op. cit.)*, where several correlation tables between key words are exhibited.

As we can see in Figure 3, the HBP agglutinates around three main themes: logic (67), semiotics (65) and pragmatism (64), the numbers in parentheses indicate the number of the entries in the HBP with such key words.

- mathematics (10)
  - diagrams (7)
    - phaneroscopy (35)
      - firstness (2)
      - secondness (2)
      - thirdness (6)
    - normative sciences (7)
      - esthetics (9)
      - ethics (5)
      - logic (67)
        - semiotics (65)
          - classification of signs (17)
          - *ground* (4)
          - icons (4)
          - indexes (2)
          - interpretants (19)
        - propositional calculus (13)
        - logic of relatives (7)
          - existential graphs (6)
          - truth (19)
        - methodology of research (35)
          - abduction (25)
          - induction (6)
        - classification of sciences (7)
        - pragmatism (64)
          - pragmatic maxim (20)
          - community (20)
    - metaphysics (9)
      - realism (40)
      - continuity (synechism) (16)
      - cosmology (5)
      - religion (5)
- exact sciences (6)

Figure 3. HBP: iconic tree of the themes studied, following Peirce's classification of sciences.

But beyond logic, as well as semiotics and pragmatism (understood as "standard" polarities in any reading of Peirce), the iconic tree of the HBP already reflects some peculiarities of the Spanish language reception. For example, the fact that realism (40) is one of the major themes in the HBP shows the peculiar situation of the Hispanic community of researchers, which has to deal with hard economic and social environments, and thus has to draw particular attention – beyond, for instance, the Anglo-Saxon analytical nominalism – to very concrete interrelations between knowledge, life and the external world. On the other side, themes such as methodology of research (35) and community (20) – often studied in papers related to the issue of realism – are also indicative of the precarious situation of some researchers interested in building minimal thresholds of communication, regulation and solidarity. Phaneroscopy (35) appears little studied in its theoretical range but is much invoked in the study of Peirce's classifications of signs (17); it is one of the instances that we may call *non-productive* in the HBP, with excessive taxonomic repetitions that are already well known. Nevertheless, it is also related more productively with abduction (25), a theme to which the HBP provides new and interesting perspectives. Nubiola and Aliseda study this theme until 2000 and they open the way to Niño's outstanding 2007 Ph.D. thesis. In the coming years it will be considered as *the* masterful treatment, in any language, of the correlative problem regarding abduction/induction in Peirce's chronological development.

Although the previous records show some *predicative* themes in the HBP, it must be observed that, from a full Peircean perspective, a more faithful approach to the themes studied in the HBP comes from considering the spectrum of all (dyadic) *correlations* of key words. The detailed analytical frame obtained (a diagonal matrix 32x32) is too large to show here, but a condensed synthetic diagram is shown in Figure 4.

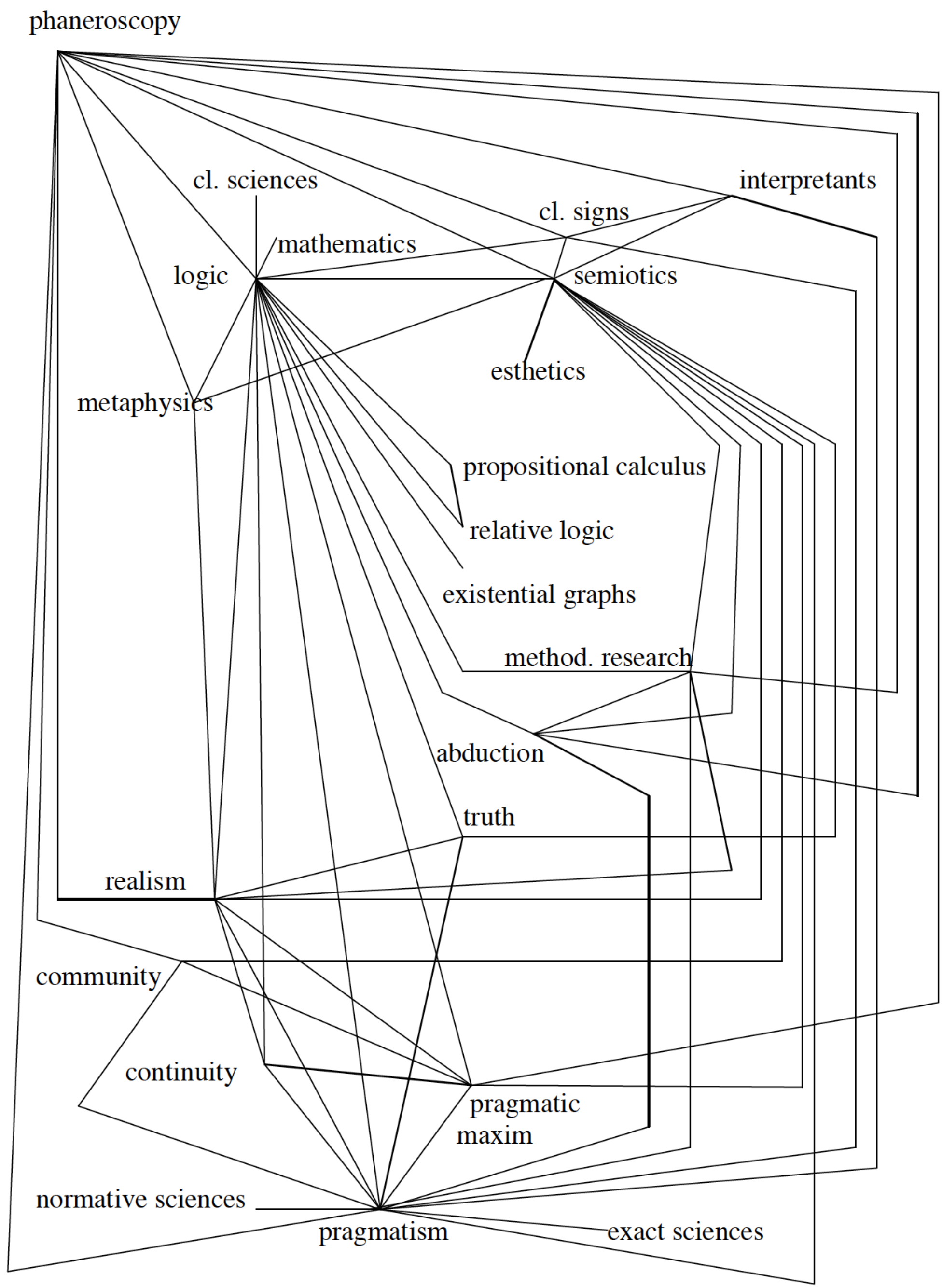


Figure 4. HBP: web of main circuits and knots.

The correlations are indicative of some *orientations* obtained in the HBP: for example, the fact that logic is much more correlated with philosophical and semiotic themes, rather than with technical ones (logic of relatives, existential graphs), is a good indicator of the character often vague and generalist of the HBP, and by the way, a situation that extends also to non-Hispanic studies! Although it is well known that understanding Peirce requires thorough study, many texts in the HBP have often confused the acknowledgement of some praiseworthy individual private efforts with the opportunity to make the result of such efforts available to the public. It is a trend that has opened the way to unnecessary repetitions and introductory presentations, a sort of "geometrical" flattening that the HBP will have to fight fiercely in the future. In retrospect, some of the most valuable contributions to the HPB can in fact be seen as careful case studies of well bounded themes along Peirce's heritage: modalizations of the pragmatist maxim in the later Peirce ([Castillo 1991]), creative *musement* ([Barrena 1996]), formal abduction ([Aliseda 1998]), existential graphs ([Poveda 2000]). In the last few years, the in-depth Peircean studies of Barrena, Niño, Oostra, are showing that the HBP has attained a new level of exigency and originality.

Beyond specific contributions, the HBP has grown also thanks to a climate of seriousness and argumentative rigour, whose adequate *density* can be glanced in Figure 5. The good number of intersections in Figure 5 show a nice integration level of many HBP trends. The more visited themes are situated around the *central* intersection between pragmatism, logic, phaneroscopy and pragmatism: classification of signs, interpretants, methodology of research, abduction, realism, community. On the other hand, on the *borders* of Figure 5 some of the main singularities of the HBP emerge. The broadly acknowledged peculiar absence of papers regarding the *exact sciences* reflects the weak knowledge of Peirce in the Hispanic scientific community ([Riba 1995] is a nice exception). Other peculiarities include a lack of studies regarding "pure" phaneroscopy, and a dislocation of the normative sciences, where Peirce's final bond with aesthetics, ethics and logic is carefully avoided by specialists ([Fontrodona 1996a, 1999] constitutes again a nice exception).

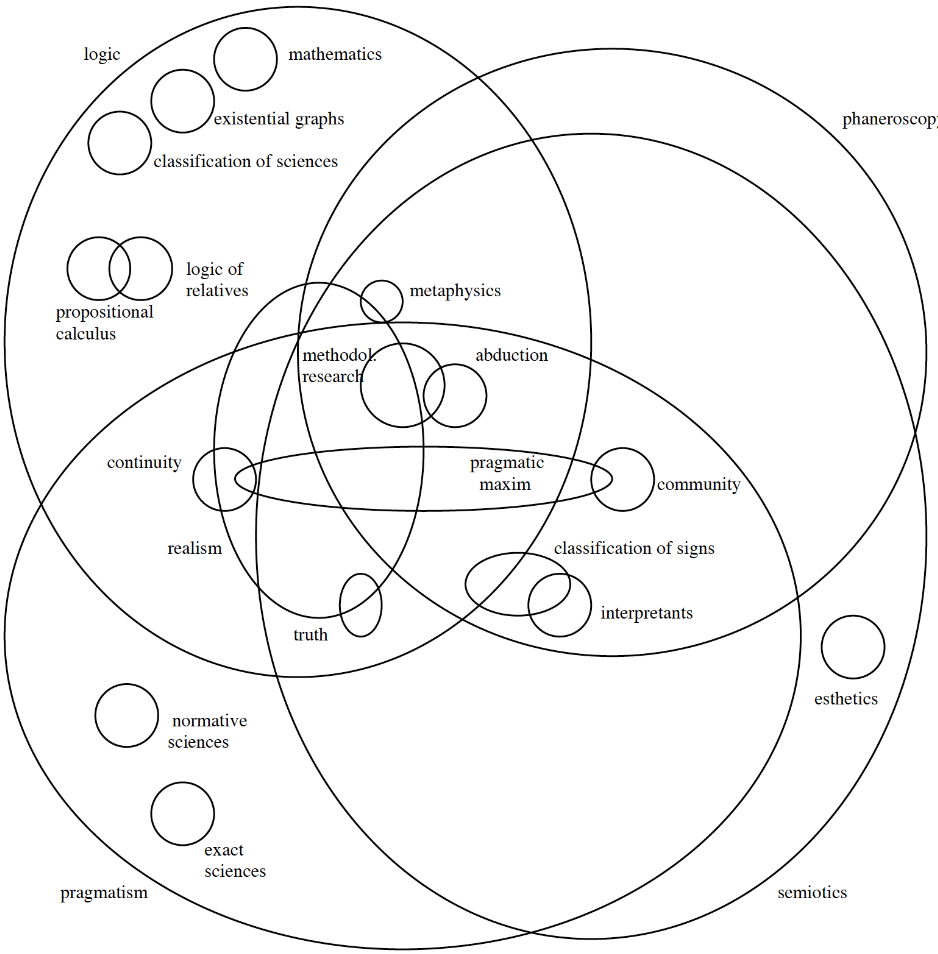


Figure 5. HBP: map with main polarities and agglutinations.

A *calibration* attempt of the HBP may be realized introducing a somewhat *vague* – and consciously debatable – ranking of items in the bibliography: original contributions at an international level (17%), contributions at a Hispanic level (42%), valuable expositions and neutral glosses (34%), nonsense (7%). The following list includes Peircean themes and some main contributions in the long century 1891–2000:

- relationships between pragmatism and vitalism (Vaz Ferreira);
- Peirce's architectonics (Ferrater Mora);
- Peirce's semiotics from historic and hermeneutic perspectives (Castañares, Beuchot, Forastieri-Briaschi);
- rationality limits (Castillo);
- Peirce and Spain (Nubiola);

- interpretants in literature (Vicente Gómez);
- creativity and religion (Barrena);
- managing (Fontrodona);
- mathematical logic (Oostra, Zalamea);
- abduction (Aliseda, Herrera);
- existential graphs (Poveda).

After a period of general overviews, the HBP will now have to concentrate on long, in-depth, Peircean studies in very well-defined, local fragments of his system, thanks to the energy of newcomers in the field. Hopefully, the immense scientific awareness of Peirce will begin to be emulated, not only trying to encompass the width of his knowledge, but, most importantly, trying to study in depth its *profound technical* spectrum.

Author index (years point to the bibliography; books and Ph.D. theses in **bold**)

Herrero, Ángel, **1988**

Legris, Javier, 1996
Llamas, Carmen, 1996
López Melián, Josefa, **1998**
Lugo, Elena, 1970
Lutzky, Julio, 1998

Magariños de Morentín, Juan, **1983**
Marías, Julián, 1958
Montoya, José, 1992
Morales, Fernando, 1999
Moulines, Carlos Ulises, 1981

Negro, Dalmacio, 1978
Nubiola, Jaime, 1991, 1992, 1993, 1994a, **1994b**, 1994c, 1995a, 1995b, **1996a**, 1996b, 1997 (Cobo), 1997a, 1997b, **1998a**, 1998b, 1999

Oostra, Arnold, 2000
Ortiz de Landázuri, Carlos, **1988**, 1996
Osejo, Edgar, 1996 (Soto)

Paz Gago, José María, **1983**, 1999
Pérez Carreño, Francisca, **1987**, **1988a**, 1988b
Pérez de Tudela, Jorge, **1988**, 1992
Polanco, Moris, 1996
Poveda, Yuri, 2000
Pulice, Gabriel (et al.), **2000**

Ramos, Pedro, 1991
Restrepo, Mariluz, 1990, **1993**
Reyes Prósper, Ventura, 1891a, 1891b, 1892
Riba, Carles, 1995
Rivas Monroy, Mª. Uxía, 1994, 1996a, 1996b, 1997
Romera Castillo, José (et al.), **1992**
Ruiz-Werner, Juan Antonio, 1970, 1971

Santos, Ceferino, 1959
Sercovich, Armando, 1974, 1987
Soto, Fernando, 1996 (Soto)

Tani, Rubén, 1984, 1987
Tordera, Antonio, **1978**

Vásquez, Francisco, 1981
Vaz Ferreira, Carlos, **1909**
Vericat, José, 1988

Vicente Gómez, Francisco, 1992, 1994
Vilches, Lorenzo, 1986

Zalamea, Fernando, 1993, 1997a, 1997b, **2000a**, 2000b, 2000c
Zecchetto, Victorino (et al.), **1999**

Bibliography

TEXTS (IN SPANISH) OF HISPANIC AUTHORS ON PEIRCE 1891–2000
CHRONOLOGICAL ORDER

[Reyes Prósper 1891a] Ventura Reyes Prósper, "La lógica simbólica" (I, II, II (1)), *Naturaleza, Ciencia e Industria* XXVII (1891) (continues *La Gaceta Industrial, la Ciencia Eléctrica y la Naturaleza*, 3ª época, vol. I), 187–188, 254–256, 319–321.

[Reyes Prósper 1891b] Ventura Reyes Prósper, "Christine Ladd Franklin", *El Progreso Matemático* 12 (1891), 297–300.

[Reyes Prósper 1892] Ventura Reyes Prósper, "Charles Santiago Peirce y Oscar Honward Mitchell" [*sic*], *El Progreso Matemático* 18 (1892), 170–173.

[Vaz Ferreira 1909] Carlos Vaz Ferreira, *El pragmatismo*, Montevideo: Tipografía de la Escuela Nacional de Artes y Oficios, 1909, 117 pages. [2nd edition and translation to French: *Le pragmatisme*, Montevideo: Talleres Gráficos Barreiro y Ramos, 1914, 153 pages.] [reissued in: Carlos Vaz Ferreira, *Tres filósofos de la vida. Nietzche, James, Unamuno*, Buenos Aires: Losada, 1965, 71–193].

[Alberini 1910] Coriolano Alberini, *El pragmatismo*, Buenos Aires: Otero & Co. Impresores, 1910.

[Espasa 1920] Enciclopedia Espasa [unknown author], "Peirce (Carlos Santiago Sanders)", in: *Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo-americana*, Madrid: Espasa-Calpe, 1920, tomo XLII, 1418.

[García Bacca 1933] Juan David García Bacca, "Simbólica (Lógica)", in: *Enciclopedia Universal Ilustrada Europeo-americana*, Madrid: Espasa-Calpe, 1933, vol. 9, 1326–1339.

[Ferrater Mora 1944 / 51 / 58] José Ferrater Mora, "Peirce (Charles Sanders)", in: J. Ferrater Mora, *Diccionario de Filosofía*, Buenos Aires: Sudamericana, 2nd edition, 1944, 532–533; 3rd edition, 1951; 4th edition, 1958, 1036–1037.

[Ferrater Mora 1955] José Ferrater Mora, "Filosofía y arquitectura", in: José Ferrater Mora, *Cuestiones disputadas. Ensayos de filosofía*, Madrid: Revista de Occidente, 1955, 43–59 [2nd version: "Filosofía y arquitectura", in: José Ferrater Mora, *Obras* *selectas*, Madrid: Revista de Occidente, 1967, vol. II, 274–284].

[Marías 1958] Julián Marías, "El pragmatismo", in: J. Marías, *Historia de la filosofía*, Madrid: Manuales de la Revista de Occidente, 11th edition, 1958, 387–392.

[Santos 1959] Ceferino Santos, Review of "Ninfa Bosco, *La filosofia pragmatica di Ch. S. Peirce*, Torino: Edizioni di Filosofia, 1959", *Pensamiento* 21 (1959), 363.

[Delacre 1969] Georges Delacre, "Peirce y su metodología", *Diálogos* 6 (14) (1969), 61–77.

[Lugo 1970] Elena Lugo, "La verdad según el pragmatismo de C. S. Peirce", *Nuestro Tiempo* 191 (1970), 122–134.

[Ruiz-Werner 1970] Juan Antonio Ruiz-Werner, "Prólogo", in: C. S. Peirce, *Deducción, inducción e hipótesis*, Buenos Aires: Aguilar, 1970, 9–31.

[Ruiz-Werner 1971] Juan Antonio Ruiz-Werner, "Prólogo", in: C. S. Peirce, *Mi alegato en favor del pragmatismo*, Buenos Aires: Aguilar, 1971, 9–20.

[Basave 1972] Agustín Basave, "Significación y sentido del pragmatismo norteamericano", *Dianoia* 18 (1972), 251–272.

[Sercovich 1974] Armando Sercovich, "Presentación. Interpretantes para Charles Sanders Peirce: Semiótica e ideología", in: C. S. Peirce, *La ciencia de la semiótica*, Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión, 1974, 9–14.

[Negro 1978] Dalmacio Negro, "Prólogo", in: C. S. Peirce, *Lecciones sobre el pragmatismo*, Buenos Aires: Aguilar, 1978, 7–44.

[Tordera 1978] Antonio Tordera, *Hacia una semiótica pragmática. El signo en Ch.S. Peirce*, Valencia: Fernando Torres, 1978, 158 pages.

[Moulines 1981] Carlos Ulises Moulines, Review of "Robert Almeder, *The Philosophy of Charles S. Peirce*, Oxford: Blackwell, 1980", *Crítica* 13 (1981), 123–126.

[Vásquez 1981] Francisco Vásquez, Review of "J. Buchler (ed.), *The Philosophy of Peirce. Selected Writings*, New York: Harcourt & Brace, 1940", *Estudios Bibliográficos de Filosofía de la Naturaleza* 3 (1981), 103–110.

[Battistella 1983] Ernesto H. Battistella, *Pragmatismo y semiótica en Charles S. Peirce*, Caracas: Universidad Central de Venezuela, 1983, 71 pages.

[Magariños de Morentín 1983] Juan Magariños de Morentín, *El signo: las fuentes teóricas de la semiología: Saussure, Peirce, Morris*, Buenos Aires: Hachette, 1983, 197 pages.

[Paz Gago 1983] José María Paz Gago, *Pragmática del texto poético-lírico*, Ph.D. thesis (Dir. Carmen Bobes), Facultad de Filología, Universidad de Oviedo, 1983.

[Beuchot 1984] Mauricio Beuchot, "La función del pensamiento dentro del fenómeno semiótico en Peirce y la Escolástica", *Investigaciones Semióticas* 4 (1984), 133–144.

[Tani 1984] Rubén M. Tani, "La semiótica fenomenológica de Hegel a Peirce", *Revista de la Facultad de Humanidades y Ciencias* 2 (1984), 9–16.

[Beuchot 1985] Mauricio Beuchot, "Ciencia, lógica e implicación en Charles S. Pierce" [*sic*], *Elementos* 2 (1985), 29–31.

[Castañares 1985] Wenceslao Castañares, *El signo: problemas semióticos y filosóficos*, Ph.D. thesis (Dir. José Hierro), Facultad de Filosofía y Ciencias de la Educación, Universidad Complutense de Madrid, 1985, 457 pages.

[Castañares 1986] Wenceslao Castañares, "Semiótica y filosofía: C. S. Peirce", *Investigaciones Semióticas* 1 (1986), 165–180.

[García Noriega 1985] Benito García Noriega, Review of "Pierre Thibaud, *La lógica de Charles Sanders Peirce. Del álgebra a los gráficos*, Madrid: Paraninfo, 1982", *Arbor* 120 (1985), 125–126.

[González Ochoa 1986] César González Ochoa, *Imagen y sentido. Elementos para una semiótica de los mensajes visuales*, México: UNAM, 1986, 197 pages.

[Vilches 1986] Lorenzo Vilches, "Peirce en España", *Estudios Semióticos* 6–7 (1986), 3–5.

[Castañares 1987a] Wenceslao Castañares, "Ch. S. Peirce: historia de una marginación", *Revista de Occidente* 71 (1987), 125–142.

[Castañares 1987b] Wenceslao Castañares, "Filosofía pragmática y lógica de la representación-mediación", *Revista de Occidente* 79 (1987), 138–144 (Review of C. S. Peirce, *Obra lógico-semiótica*, Madrid: Taurus, 1987, in relation with C. S. Peirce, *Collected Papers* and C. S. Peirce, *Semiotics and Significs*).

[Pérez Carreño 1987] Francisca Pérez Carreño, *Estética y teoría de la imagen*, Ph.D. thesis (Dir. Valeriano Bozal), Facultad de Filosofía y Letras, Universidad Autónoma de Madrid, 1987.

[Sercovich 1987] Armando Sercovich, "Introducción", in: C. S. Peirce, *Obra lógico-semiótica*, Madrid: Taurus, 1987, 7–24.

[Tani, Argañaraz 1987] Rubén Tani, N. N. Argañaraz, "La semiótica de Peirce", *Relaciones* 34 (1987), 9–11.

[Castañares 1988a] Wenceslao Castañares, “De la lógica-semiótica y el arte simulatoria”, *La Balsa de la Medusa* 5–6 (1988), 150–155.

[Castañares 1988b] Wenceslao Castañares, “Lógica, semiótica y hermenéutica: el pensamiento abductivo”, in: *Actas del II Simposio Internacional de Semiótica (1986)*, Oviedo: Universidad de Oviedo, 1988, vol. I, 131–147.

[Castrillo 1988] Pilar Castrillo, “Introducción”, in: C. S. Peirce, *Escritos lógicos*, Madrid: Alianza, 1988, 11–33.

[Herrero 1988] Angel Herrero, *Semiótica y creatividad. La lógica abductiva*, Madrid: Palas Atenea, 1988, 167 pages.

[Ortiz de Landázuri 1988] Carlos Ortiz de Landázuri, *Acción y método. La transformación actual de la filosofía según Karl-Otto Apel*, Ph.D. thesis (Dir. Alejandro Llano), Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Navarra, 1988, 2 vols, 1264 pages.

[Pérez Carreño 1988a] Francisca Pérez Carreño, *Los placeres del parecido. Icono y representación*, Madrid: Visor, 1988, 209 pages.

[Pérez Carreño 1988b] Francisca Pérez Carreño, “Una ocasión perdida”, *La Balsa de la Medusa* 5–6 (1988), 155–161 [Review of C. S. Peirce, *Obra lógico-semiótica*, Madrid: Taurus, 1987].

[Pérez de Tudela 1988] Jorge Pérez de Tudela, *El pragmatismo americano: acción racional y reconstrucción del sentido*, Madrid: Cincel, 1988, 234 pages.

[Vericat 1988] José Vericat, “Introducción”, in: C. S. Peirce, *El hombre, un signo*, Barcelona: Crítica, 1988, 7–37.

[Bello 1989] Gabriel Bello, “El pragmatismo americano”, in: V. Camps (ed.), *Historia de la Ética*, Barcelona: Crítica, 1989, vol. III, 38–86.

[Castañares 1989] Wenceslao Castañares, “... Y la palabra era el hombre”, *Revista de Occidente* 97 (1989), 173–179 [Review of C. S. Peirce, *El hombre, un signo*, Barcelona: Crítica, 1988].

[Gomila 1989] Antoni Gomila, “El sujeto del pragmatismo: Peirce y Mead”, *Taula* 11 (1989), 83–97.

[Badesa 1990] Calixto Badesa, *El teorema de Löwenheim en el marco de la teoría de relativos*, Ph.D. thesis (Dir. Jesús Mosterín), Facultad de Filosofía, Universidad de Barcelona, 1990.

[Restrepo 1990] Mariluz Restrepo, “La semiótica de Charles S. Peirce”, *Signo y*

Pensamiento 9 (1990), 27–46.

[Beuchot 1991] Mauricio Beuchot, “La filosofía escolástica en los orígenes de la semiótica de Peirce”, *Analogía* 5 (1991), 155–166.

[Castillo 1991] Ramón del Castillo, “Indices y referencia en Peirce”, *Anales del Seminario de Metafísica* 25 (1991), 155–193.

[Herrera 1991] Alejandro Herrera, “La aproximación a la verdad en Peirce”, *Analogía* 5 (1991), 143–154.

[Nubiola 1991] Jaime Nubiola, “C. S. Peirce: un marco renovado para la filosofía del lenguaje contemporánea”, in: *Comunicaciones del Encuentro (1991) de Lógica y Filosofía de la Ciencia*, Madrid, 1991, 133–139.

[Ramos 1991] Pedro Ramos, “Significado pragmático en Peirce”, *Analogía* 5 (1991), 101–141.

[Abad 1992] Francisco Abad, “Peirce, Jakobson y la esencia de la literatura y del lenguaje”, *Signa* 1 (1992), 143–151.

[Canoa Galiana 1992] Joaquina Canoa Galiana, “Lectura de signos en *Tres sombreros de copa* de M. Mihura (aplicación del concepto de interpretante)”, *Signa* 1 (1992), 189–200.

[Castañares 1992a] Wenceslao Castañares, “Algunas consecuencias de dos principios peirceanos”, *Signa* 1 (1992), 135–142.

[Castañares 1992b] Wenceslao Castañares, “Peirce en España: panorama bibliográfico”, *Signa* 1 (1992), 215–224.

[Castillo 1992] Ramón del Castillo, *La práctica y los límites de la interpretación (el pragmatismo de Peirce, Dewey y Wittgenstein)*, Ph.D. thesis (Dir. Jacobo Muñoz), Facultad de Filosofía, Universidad Complutense de Madrid, 1992.

[Domínguez Caparrós 1992] José Domínguez Caparrós, “Ch. S. Peirce y la teoría literaria”, *Signa* 1 (1992), 169–178.

[Garrido Gallardo 1992] Miguel Ángel Garrido Gallardo, “A propósito de Peirce: Semiótica. Literatura. Verdad”, *Signa* 1 (1992), 163–167.

[Montoya 1992] José Montoya, “Pragmatismo y filosofía contemporánea”, *Diálogo Filosófico* 23 (1992), 191–198.

[Nubiola 1992] Jaime Nubiola, “Peirce en España y España en Peirce”, *Signa* 1 (1992), 225–231.

[Pérez de Tudela 1992] Jorge Pérez de Tudela, "Notas para un debate: neopositivismo y pragmatismo ante el problema del conocer", *Anuario del Departamento de Filosofía* 8 (1991–92), 65–81.

[Romera Castillo et al. 1992] José Romera Castillo, Alicia Yllera, Rosa Calvet (Eds.), *Ch. S. Peirce y la literatura*, monographic number *Signa* [1 (1992)], Madrid: UNED, 1992, 240 pages.

[Vicente Gómez 1992] Francisco Vicente Gómez, "La relevancia de la semiótica de Ch. S. Peirce en la constitución de una pragmática de la literatura", *Signa* 1 (1992), 153–161.

[Andacht 1993] Fernando Andacht, *Entre signos de asombro. Antimanual para iniciarse a la semiótica*, Montevideo: Trilce, 1993, 200 pages.

[Beuchot 1993a] Mauricio Beuchot, "Clasificación de los signos, argumentación e influencia de la escolástica en Peirce", *Acciones Textuales* 3 (1993), 125–140.

[Beuchot 1993b] Mauricio Beuchot, *Elementos de semiótica*, Xalapa: Universidad Veracruzana, 1993, 303 pages. [1st edition: México: UNAM, 1979].

[Faerna 1993] Angel Faerna, *Pragmatismo conceptualista: la teoría del conocimiento de C. I. Lewis*, Ph.D. thesis (Dir. Jacobo Muñoz), Facultad de Filosofía, Universidad Complutense de Madrid, 1993.

[Nubiola 1993] Jaime Nubiola, "Juan Luis Vives y Charles S. Peirce", *Anuario Filosófico* 26 (1993), 155–164.

[Restrepo 1993] Mariluz Restrepo, *Ser-Signo-Interpretante. Filosofía de la representación de Charles S. Peirce*, Bogotá: Significantes de Papel Ediciones, 1993, 235 pages.

[Zalamea 1993] Fernando Zalamea, "Una jabalina lanzada hacia el futuro: anticipos y aportes de C. S. Peirce a la lógica matemática del siglo XX", *Mathesis* 9 (1993), 391–404.

[Castañares 1994a] Wenceslao Castañares, "Abducción y traducción entre culturas", in: A. Rosa, J. Valsiner (Eds.), *Historical and Theoretical Discourse*, Madrid: Fundación Infancia y Aprendizaje, 1994, 48–55.

[Castañares 1994b] Wenceslao Castañares, *De la interpretación a la lectura*, Madrid: Iberediciones, 1994, 382 pages.

[Castrillo 1994] Pilar Castrillo, "H. MacColl, C. S. Peirce y la lógica proposicional en el s. XIX", *Éndoxa: Series Filosóficas* 3 (1994), 73–93.

[Nubiola 1994a] Jaime Nubiola, "C. S. Peirce: pragmatismo y logicismo", *Philosophica* 17 (1994), 209–216.

[Nubiola 1994b] Jaime Nubiola, *La renovación pragmatista de la filosofía analítica. Una introducción a la filosofía contemporánea del lenguaje*, Pamplona: EUNSA, 1994, 109 pages.

[Nubiola 1994c] Jaime Nubiola, "Peirce y España: hacia una mejor comprensión", in: J. M. Paz Gago (ed.), *Semiótica y Modernidad. Actas del V Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica*, La Coruña: Universidade da Coruña, 1994, 183–191.

[Rivas Monroy 1994] Mª. Uxía Rivas Monroy, "Retórica y pragmática: un acercamiento desde las nociones de interpretante e intérprete", in: Antonio Ruiz (ed.), *Actas del Primer Encuentro Interdisciplinar sobre Retórica, Texto y Comunicación*, Cádiz: Universidad de Cádiz, 1994, tomo II, 105–108.

[Vicente Gómez 1994] Francisco Vicente Gómez, "La definición de la literatura y la teoría de los interpretantes de Charles S. Peirce", in: J. M. Paz Gago (ed.), *Semiótica y Modernidad. Actas del V Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica*, La Coruña: Universidade da Coruña, 1994, 261–286.

[Castillo 1995] Ramón del Castillo, *Conocimiento y acción. El giro pragmático de la filosofía*, Madrid: UNED, 1995, 585 pages.

[Nubiola 1995a] Jaime Nubiola, "Eugenio d'Ors: una concepción pragmatista del lenguaje", *Revista de Filosofía*, 3ª época, 8 (1995), 49–56.

[Nubiola 1995b] Jaime Nubiola, "W. James y L. Wittgenstein: ¿Por qué Wittgenstein no se consideró pragmatista?", *Anuario Filosófico* 28 (1995), 411–423.

[Riba 1995] Carles Riba, "Charles S. Peirce (1839–1914) – Del triángulo mágico y de sus pérdidas y conservaciones. Algunas notas sobre la invisibilidad de Ch.S. Peirce en la historia de la psicología", *Anuario de Psicología* 64 (1995), 83–99.

[Andacht 1996] Fernando Andacht, "El lugar de la imaginación en la semiótica de C. S. Peirce", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1265–1289.

[Barrena 1996] Sara F. Barrena, "Prólogo" e "Introducción", in: C. S. Peirce, *Un argumento olvidado en favor de la realidad de Dios*, Pamplona: Cuadernos de Anuario Filosófico, 1996, 5–68.

[Beuchot 1996] Mauricio Beuchot, "El realismo escolástico de los universales en Peirce", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1159–1172.

[Carbonell 1996] Claudia Carbonell, Review of "C. S. Peirce, *Un argumento olvidado en favor de la realidad de Dios*, Pamplona: Cuadernos de Anuario Filosófico, 1996", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1464–1466.

[Castañares 1996] Wenceslao Castañares, "El efecto Peirce. Sugestiones para una teoría de la comunicación", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1313–1330.

[Faerna 1996] Ángel Faerna, *Introducción a la teoría pragmatista del conocimiento*, Madrid: Siglo XXI, 1996.

[Fontrodona 1996a] Joan Fontrodona, *Ciencia y práctica en la acción directiva. Un enfoque peirceano para la dirección de empresas*, Ph.D. thesis (Dir. Jaime Nubiola), Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Navarra, 1996, 433 pages.

[Fontrodona 1996b] Joan Fontrodona, "El «Evangelio de la avaricia»: Peirce y la dirección de empresas", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1369–1382.

[Forastieri-Briaschi 1996] Eduardo Forastieri-Briaschi, "Gracián, Peirce: conceptos, signos", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1173–1184.

[Génova 1996] Gonzalo Génova, "Los tres modos de inferencia", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1249–1263.

[Gomila 1996] Antoni Gomila, "Peirce y la ciencia cognitiva", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1345–1367.

[Legris 1996] Javier Legris, "Sobre la ley de Peirce y las relaciones entre la lógica intuicionista y la lógica clásica", *Analogía* 10 (1996), 165–178.

[Llamas 1996] Carmen Llamas, "La recepción de Peirce en la lingüística española", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1383–1394.

[Nubiola 1996a] Jaime Nubiola (ed.), *Claves del pensamiento de C. S. Peirce para el siglo XXI*, monographic number *Anuario Filosófico* [29 (1996), 1127–1440], Pamplona: Universidad de Navarra, 1996, 314 pages.

[Nubiola 1996b] Jaime Nubiola, "Realidad, ficción y creatividad en Peirce", in: José María Pozuelo Yvancos, Francisco Vicente Gómez (Eds.), *Mundos de Ficción, II. Actas del VI Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica*, Murcia: Universidad de Murcia, 1996, 1139–1145.

[Ortiz de Landázuri 1996] Carlos Ortiz de Landázuri, "De Kant a Peirce, cien años después (a través de Karl Otto Apel)", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1185–1210.

[Polanco 1996] Moris A. Polanco, "Peirce y Putnam sobre la experiencia y la naturaleza", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1239–1247.

[Rivas Monroy 1996a] Mª. Uxía Rivas Monroy, "El signo y el sentido de la realidad", in: C. Martínez, U. Rivas, L. Villegas (Eds.), *Verdad: lógica, representación y mundo*, Santiago de Compostela: Universidade de Santiago de Compostela, 1996, 421–430.

[Rivas Monroy 1996b] Mª. Uxía Rivas Monroy, "Frege y Peirce: en torno al signo y su fundamento", *Anuario Filosófico* 29 (1996), 1211–1224.

[Soto, Osejo, Caballero 1996] Fernando Soto, Edgar Osejo, Rafael Caballero, "Acerca de una enumeración peirceana de los racionales", *Boletín de Matemáticas* Nueva Serie 3 (1996), 83–96.

[Azaretto 1997] Clara Azaretto, "La lógica del descubrimiento en la teoría psicoanalítica", *La Porteña. Revista de la Sociedad Porteña de Psicoanálisis* 3 (1997), 45–53.

[Caballero 1997] Tomás Caballero, "C. S. Peirce y la comunicación. Conocimiento, cultura y sociedad en la época *massmediática*", *Anábasis* 6 (1997), 129–141.

[Castrillo 1997] Pilar Castrillo, "Christine Ladd-Franklin y su puesto en la tradición algebraica de la lógica", *Mathesis* 13 (1997), 117–130.

[Cobo, Nubiola 1997] Jesús Cobo, Jaime Nubiola, "Cuatro cartas americanas. Correspondencia de Ventura Reyes Prósper con Charles S. Peirce y Christine Ladd-Franklin", *Llull* 20 (1997), 757–768.

[Fontrodona 1997] Joan Fontrodona, "Creatividad, comunidad y crecimiento: tres principios para la dirección de empresas", in: A. Rodríguez, J. Fontrodona (Eds.), *El empresario en el nuevo marco socio-económico*, Santander: Humanismo y Empresa, 1997, 139–159.

[Génova 1997] Gonzalo Génova, *Charles S. Peirce: la lógica del descubrimiento*, Pamplona: Cuadernos de Anuario Filosófico (45), 1997, 90 pages.

[Nubiola 1997a] Jaime Nubiola, "C. S. Peirce y la filosofía hispánica del siglo XX", in: A. Estany, D. Quesada (Eds.), *Actas del II Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, Barcelona: Universitat Autònoma, 1997, 423–427.

[Nubiola 1997b] Jaime Nubiola, "C. S. Peirce y la Argentina. La recepción del pragmatismo en la filosofía hispánica", in: J. C. Morán et al. (Eds.), *Actas del IX Congreso Nacional de Filosofía de la Asociación Filosófica Argentina*, La Plata, 1997.

[Rivas Monroy 1997] Mª. Uxía Rivas Monroy, "Las bases del realismo en G. Frege y Ch. S. Peirce", in: A. Estany, D. Quesada (Eds.), *Actas del II Congreso de la Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España*, Barcelona: Universitat Autònoma, 1997, 48–52.

[Zalamea 1997a] Fernando Zalamea, *Lógica topológica: una introducción a los* *gráficos existenciales de Peirce,* XV Coloquio Distrital de Matemáticas, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1997, 26 pages.

[Zalamea 1997b] Fernando Zalamea, "Pragmaticismo, tríadas y continuidad: aspectos globales y locales de la lógica matemática contemporánea desde perspectivas peirceanas", *Mathesis* 13 (1997), 147–156.

[Aliseda 1998] Atocha Aliseda, "La abducción como cambio epistémico: C. S. Peirce y las teorías epistémicas en inteligencia artificial", *Analogía* 12 (1998), 125–144.

[Beuchot 1998] Mauricio Beuchot, "Abducción y analogía", *Analogía* 12 (1998), 57–68.

[Castrillo 1998] Pilar Castrillo, "La historia de los inicios de la lógica cuantificacional, una historia fallida", in: C. Solís (Ed.), *Alta tensión*, Barcelona: Paidós, 1998, 383–397.

[De Miguel 1998] Jorge R. De Miguel, "La influencia kantiana y su crítica en el pragmatismo de Peirce", *Tópicos* 6 (1998), 91–114.

[López 1998] Josefa López Melián, *El conocimiento como creencia en el joven Peirce*, Ph.D. thesis (Dir. Carlos Ortiz de Landázuri), Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Navarra, 1998, 313 pages.

[Lutzky 1998] Julio R. Lutzky, "Introducción de Peirce para una lógica del deseo", in: *Redes de la Letra. Escritura del psicoanálisis*, Buenos Aires: Legere, 1998, 63–74.

[Nubiola 1998a] Jaime Nubiola (Ed.), *Charles S. Peirce y la abducción*, número monográfico (12/1) de *Analogía*, México: Asociación Filosófica de México, 1998, 187 pages.

[Nubiola 1998b] Jaime Nubiola, "Walker Percy y Charles S. Peirce: abducción y lenguaje", *Analogía* 12 (1998), 87–96.

[Castañares 1999] Wenceslao Castañares, "La prueba y la probabilidad retórica", *Cuadernos de información y comunicación* 4 (1999), 33–52.

[Fontrodona 1999] Joan Fontrodona, *Ciencia y práctica en la acción directiva*, Madrid: Rialp, 1999, 299 pages.

[González 1999] Santiago González, "Gráficos existenciales de Ch.S. Peirce y la didáctica de la demostración", *Memorias X Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 1999, 9–20.

[Morales 1999] Fernando Morales, "La teoría pragmatista de la verdad. Peirce, James y Santayana", *Anábasis* 6 (1999), 109–132.

[Nubiola 1999] Jaime Nubiola, "Prejuicios e «ideas hechas» en Peirce", in: T. Blesa (Ed.), *Mitos. Actas del VII Congreso Internacional de la Asociación Española de Semiótica*, Zaragoza: Universidad de Zaragoza, 1999, 274–277.

[Paz Gago 1999] José María Paz Gago, *La recepción del poema. Pragmática del texto poético*, Kassel: Reichenberger, 1999, 283 pages.

[Zecchetto 1999] Victorino Zecchetto (Ed.), *Seis semiólogos en busca del lector: Saussure, Peirce, Barthes, Greimas, Eco, Verón*, Buenos Aires: Ciccus/La Crujía, 1999, 250 pages.

[Elizondo 2000] Jesús Elizondo, *Semiosis y acción: la teoría de los signos de Charles Sanders Peirce*, Ph.D. thesis (Dir. Jacobo Muñoz), Facultad de Filosofía, Universidad Complutense de Madrid, 2000.

[Oostra 2000] Arnold Oostra, "Acercamiento lógico a Peirce", *Boletín de Matemáticas* Nueva Serie 7 (2000), 60–77.

[Poveda 2000] Yuri Poveda, "Los gráficos existenciales de Peirce en los sistemas Alfa^{0} y Alfa^{00}", *Boletín de Matemáticas* Nueva Serie 7 (2000), 5–17.

[Pulice, Manson, Zelis 2000] Gabriel Pulice, Federico Manson, Oscar Zelis, *Investigación y psicoanálisis. De Sherlock Holmes, Dupin y Peirce a la experiencia freudiana*, Buenos Aires: Letra Viva, 2000, 207 pages.

[Zalamea 2000a] Fernando Zalamea, *Ariel y Arisbe. Evolución y evaluación del concepto de América Latina en el siglo XX: una visión crítica desde la lógica contemporánea y la arquitectónica pragmática de C. S. Peirce*, Bogotá: Tercer Mundo, Convenio Andrés Bello, 2000, 213 pages.

[Zalamea 2000b] Fernando Zalamea, "El caso Peirce y la transculturación en América Latina: modalidades de resistencia", in: Diana Obregón (Ed.), *Culturas científicas y saberes locales*, Bogotá: CES / Universidad Nacional, 2000, 221–244.

[Zalamea 2000c] Fernando Zalamea, "Terceridad y testimonios. Saber y conflicto dentro de la faneroscopia de C. S. Peirce, con reflejos en la narrativa de Onetti", *Trans – Revista de Cultura de la Universidad Nacional* 0 (2000), 229–235.

English version of - Versione in lingua inglese di - Versión en inglés de:
Maura Iori, Deissy Narváez Ortiz, George Santi.

CONVEGNI E CONGRESSI

Convegno Nazionale *Incontri con la Matematica* n. 32

La didattica della matematica, strumento concreto in aula

Castel San Pietro Terme (Bologna)
16-17-18 novembre 2018

Il programma completo e le modalità di preiscrizione verranno pubblicate entro fine giugno 2018 nei seguenti siti:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.org
http://www.incontriconlamatematica.net

RECENSIONI
E SCHEDE BIBLIOGRAFICHE

Stefano Bartezzaghi (2017). ***Parole in gioco: Per una semiotica del gioco linguistico*****. Milano: Bompiani e Firenze: Giunti.**

Ennio Peres (2018). ***Corso di enigmistica: Tecniche e segreti per ideare e risolvere rebus, anagrammi, cruciverba e altri giochi di parole*****. Roma: Carocci.**

Al lettore non sarà mai capitato di vedersi presentare due recensioni unificate per due libri distinti, vero? Né a me è mai capitato di scriverle. Questa è la 961-esima recensione che pubblico in vita mia su una rivista, ma mai m'era successo di proporre una cosa simile.

Ora, il libro di Bartezzaghi ha già una certa … età, pubblicato nel 2017; ma io lo vedo e lo leggo solo nel marzo 2018; il libro di Peres è del 2018. Ma il caso (chissà poi se è il caso o se tutto ciò fosse già stabilito nello junghiano libro delle sincronicità) fa sì che mi capitino in mano nello stesso tempo, il primo regalatomi a Pisa dal mio amico Matteo appunto il 14 marzo 2018, il secondo arrivato come omaggio da parte della casa editrice per posta, il giorno dopo. No, dai, non è una coincidenza, era già tutto stato stabilito dal fato (d'altra parte, anche Giove vi deve sottostare, nonostante sia il padre delle Parche che lo determinano).

Lettore, ti prego, leggi i titoli e verifica che ci sono analogie stringenti; per prima la parola "gioco/giochi" in entrambi, per seconda la parola "parole".

Ho letto d'un fiato il profondo studio semiotico di Bartezzaghi, elegante e sottile, colto e convincente. Era da tanto che non leggevo un libro così profondo e dettagliato, sottile e completo. Ho molto gioito apprezzando le sue citazioni che ricalcano molte mie letture amatissime; dico solo Beckett, Borges, il Calvino di Palomar, Carroll, Cortázar, Eco, Flaiano, Gadda, García Márques, Ginzburg (Natalia), Mann, Nabokov, Palazzeschi, Perec, Poe, Proust, Queneau, Sanguineti, Stevenson, Svevo, Viola, Wallace, Yourcenar, Zamponi, Bausani, Benveniste, Beta, Bolzoni, Colli, Contini, D'Afflon, Derrida, Dossena, Fabbri, Genette, Gombrich, Greimas, Grice, Hjelmsev, Hofstadter, Sander, Huizinga, Jakobson, Klein, Lacan, Lyons, Violi, McLuhan, Migliore, Oulipo, Pignotti, Pozi, Pozzo, Praz, Rodari, De Saussure, Starobinski, Todorov, Valesio, tanto per dirne alcuni, quelli che mi hanno personalmente molto colpito, fatto riflettere, influenzato in tutti i miei studi. È per me straordinario incontrare una tal comunanza e corrispondenza di rinvii, in totale assonanza.

E poi, tutto ciò applicato al gioco di parole, a quella straordinaria potenzialità a volte latente a volte pesantemente presente nel linguaggio. D'altra parte, scriveva Wittgenstein: "Il linguaggio è un labirinto di strade, vieni da una parte e ti sai orientare, giungi allo stesso punto da un'altra parte e non ti raccapezzi più". E il "punto" nel linguaggio, è una parola... Credo si possa dire che neppure lo stesso "punto - parola" è riconoscibile, se viene usato con modalità diverse. Bartezzaghi esemplifica molte delle sue affermazioni con giochi linguistici di mille tipologie; e lo fa da par suo, con un fascino sottile irresistibile.

Un libro da non perdere.

Ennio (lo chiamo per nome perché siamo amici da parecchi decenni) mantiene nel libro quel che promette nel lungo sottotitolo; esamina concretamente ogni tipologia possibile di giochi linguistici, ti insegna non solo a risolverli, ma te ne spiega il senso, la filosofia, il sottofondo significativo, anche filosofico. E d'un tratto ti trovi abile; se eri disorientato e disarmato ai primi esempi, d'un tratto hai capito, sei padrone della situazione. Non solo sai risolvere tutto, ma cominci a inventare. Sì, un vero e proprio corso, che si dipana lentamente con migliaia e migliaia di esempi, come solo un vero didatta sa fare e capisce che sia necessario fare. Il senso delle parole in gioco (opst: il titolo di questo primo capitolo del libro di Ennio coincide con il titolo del libro di Bartezzaghi! Che si siano messi d'accordo?); le ambiguità, di significato e di lettura; i trasferimenti di lettera; le alterazioni di lettera; gli aggregati di parole. Sì, certo, un libro sui giochi di parole, ma quanto si impara in italiano (non a caso è citato De Mauro), in logica, in lingua, in poesia, in semantica, in storia …

Stavo per scrivere: in matematica; ma questo è comune a tutt'e due, anche se non esplicitato, in nessuno dei due. Tanto che mi viene spontaneo recensire qui questi libri, su una rivista di matematica, come contributi originali a quel "la matematica è dappertutto" che ha sempre costituito un mio motto, non dato per scontato, talvolta non ben capito.

Sappiamo che un testardo creatore di giochi di parole fu Leonardo da Vinci; alcuni suoi anagrammi e rebus sono davvero significativi, altri un po' banali; pensate cos'avrebbe fatto, ispirato dalla lettura di questi due libri, quell'omo sanza lettere!

A proposito di storia, lettore, sai quando si è imposto il nome "enigmistica"? No?

Bruno D'Amore

Bruno Jannamorelli (2017). *Strumenti di calcolo ingenui … ma ingegnosi e multiculturali*. Bologna: Pitagora.

$7 + 8 = 15$, $8 \times 6 = 48$; a chi di noi, esseri umani del terzo millennio verrebbe in mente di esprimere stupore davanti a questo tipo di abilità di calcolo? Eppure, se si conosce bene la storia della matematica, che almeno per un tratto iniziale è pura storia di numeri e di calcoli, non si può non rimanere ammirati davanti al percorso che l'essere umano ha compiuto per arrivare dal conteggio delle tacche sull'osso di Ishango al sistema numerico puramente simbolico oggi maggiormente diffuso nel mondo. Il libro di Bruno Jannamorelli percorre tutte le tappe di questa appassionante storia della cultura umana, focalizzando l'attenzione sugli strumenti di calcolo che le varie culture hanno prodotto e che spesso hanno condiviso tra loro. Dai coni e dalle biglie di terracotta dei Sumeri e dai *quipu*, le cordicelle a nodi degli Incas, fino agli abaci che, nelle loro diverse versioni, hanno accompagnato per millenni i calcoli dei contabili e dei commercianti di mezzo mondo, e poi fino alle prime calcolatrici meccaniche, l'Autore ci coinvolge nella narrazione di una storia appassionante e multiculturale. Il filo conduttore comune di questa storia è l'esigenza dell'essere umano di ordinare e dominare quantitativamente la realtà, escogitando strumenti sempre più efficienti di cui servirsi in questa impresa. Ma il libro non si ferma alla semplice narrazione di questa notevole avventura umana; l'Autore spiega, esempi ben scelti alla mano, il funzionamento dei metodi e degli strumenti di calcolo. Questo aspetto rende il libro non solo una lettura utile all'arricchimento culturale del lettore, che difficilmente conoscerà con tale minuziosità di particolari la storia degli strumenti di calcolo, ma anche uno strumento didattico utile per insegnanti di ogni livello scolastico, sia come fonte per episodi di storia della matematica da narrare in classe, sia come fonte di arricchimento di strategie di calcolo da insegnare ai propri allievi.

Miglena Asenova

Daniele Gouthier e Massimiliano Foschi (2017). *Dar la caccia ai numeri: Enigmi, problemi e giochi matematici*. Bari: Dedalo.

Quando un matematico parla di "problemi" lo fa raramente nell'accezione comune di "difficoltà" della lingua naturale. Per i matematici e per i didatti della matematica i problemi sono fondamentalmente due cose: 1) delle situazioni-problema, ossia delle esperienze didattiche in cui gli studenti, messi di fronte a qualcosa di nuovo, per trovare una soluzione debbono ristrutturare le conoscenze già acquisite per utilizzarle in modo nuovo, elaborando (ed è questo l'interesse nella didattica) nuove competenze; 2) delle divertenti sfide intellettuali che fanno appello al ragionamento, alle quantità, alle forme, alle previsioni e a tutto ciò che chiamiamo genericamente matematica. Gli oggetti del primo tipo appartengono alla migliore didattica, quelli del secondo puntano ad una raffinata forma di gratificazione. Ma tra questi due insiemi l'intersezione non è vuota, anzi sono moltissimi gli enigmi, gli indovinelli, i giochi matematici che hanno la forma della sfida d'intelligenza ma che possono portare a nuove competenze, oltre che alla soddisfazione personale. Altrimenti detto: giocare con la matematica non è solo divertente ma fa anche bene.

Questo libro di Foschi e Gouthier fa parte di una lunga tradizione italiana di raccolte di giochi matematici e nasce, come confessano gli autori, da circostanze fortuite in cui hanno scoperto la comune passione per questo tipo di sfide.

Nella forma questa raccolta cita evidentemente quelle del secondo novecento, come testimoniano anche la grafica, volutamente ingenua e demodé, e la scelta dei personaggi di contesto che introducono ogni problema con una scena: un ex orologiaio, una simpatica professoressa, una banda di quattro amici e tanti altri.

Alcuni di questi problemi sono versioni modificate di temi antichi o celebri. L'ambito è prevalentemente aritmetico e di geometria piana, ma ce ne sono tanti anche di tipo algebrico, probabilistico e persino qualcuno logico. Si propongono, sempre con simpatia, anche delle dimostrazioni. Compaiono fuggevolmente anche i quadrati magici cinesi.

Per risolvere questi problemi occorre molta fantasia, competenze di livello del biennio della scuola secondaria di secondo grado. Alcuni citano esplicitamente oggetti e modalità tipiche della scuola.

Se non si tratta di un lavoro di nuova concezione è certamente ricco di elementi acuti. Alcuni problemi possono levare più di qualche ora di sonno. Per fortuna alla fine ci sono soluzioni motivate.

Giovanni Giuseppe Nicosia

Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli (2017). *La matematica e la sua storia: Dalle origini al miracolo greco*. Prefazione di Umberto Bottazzini. Bari: Dedalo.

Il mio giudizio sul testo di Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli è estremamente positivo: è un testo ricco, stimolante, avvincente, che stuzzica il lettore con un racconto di carattere storico capace di permettere una vera riscoperta della Matematica e della sua evoluzione temporale, culturale, sociale … a più livelli.

Come gli stessi autori dichiarano nella premessa, *La matematica e la sua storia* non è un testo di storia della Matematica, non vuole assolutamente esserlo. I due autori, attivi nella ricerca in Didattica della Matematica, hanno un obiettivo diverso: vogliono, attraverso le pagine di questo testo (il primo di quattro volumi che onestamente non vedo l'ora di "assaporare" bene nella loro globalità) raccontarci la bellezza della Matematica e della sua storia; vogliono farci vivere la lenta e "complessa" evoluzione della disciplina; vogliono farci conoscere più da vicino i personaggi chiave sui quali si fondano le conoscenze matematiche che si studiano a scuola e all'Università.

La Matematica, come ci dicono gli autori del testo, è un umanesimo; spesso però il sapere matematico è erroneamente percepito come esclusivamente formale, astratto, rigido, a-culturale, a-politico, a-geografico, a-filosofico, … a-temporale. La "regina delle Scienze" viene quindi erroneamente vista, in alcuni casi, come una semplice successione di teoremi, di regole e formule, applicate per risolvere in modo meccanico esercizi spesso fini a sé stessi. Ma la Matematica non è questo! La Matematica è un'avventura intellettuale meravigliosa e come tale andrebbe invece presentata!

Con questo assunto, ciò che gli autori presentano in modo impeccabile nei cinque capitoli che compongono il testo, permette al lettore di vivere "il viaggio matematico", dalle sue origini al "miracolo" greco, da tante angolazioni diverse, attraverso relazioni interdisciplinari con la Musica, l'Arte, la Letteratura, la Filosofia, la Geografia … Ciò che ne deriva, come ribadito anche in precedenza, è un testo veramente appassionante, un viaggio nel tempo e nello spazio entusiasmante che pian piano permette al lettore di riflettere su chi e che cosa ha influenzato il pensiero, più in generale, la cultura.

Il conteggio con le dita della mano è universale, assoluto? Platone e Socrate erano "matematici"? Qual è la reale antichità dell'enunciato del teorema di Pitagora? Dove ha vissuto Talete?

Queste sono solo alcune delle domande alle quali in modo implicito o esplicito gli autori rispondono nel testo. Lo stile è sempre piacevole e mai noioso, appassionante.

Ritengo che studenti, insegnanti e studiosi anche di altre discipline abbiano l'opportunità di trovare in questo testo spunti di riflessione notevoli che possono, se vogliono, approfondire ancor di più anche grazie alla ricchissima bibliografia riportata nel testo dagli autori.

Nella trepidante attesa di poter proseguire la passeggiata, come la definiscono Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli, nella storia della Matematica che sarà proposta nei prossimi tre volumi promessi dagli autori, vi auguro buona lettura e buon divertimento!

Benedetto Di Paola

Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla (2017). *Leonardo: Il matematico dell'arte*. Illustrazioni di Rosalinda Incardona. Bologna: Artebambini.

Leonardo da Vinci è un personaggio conosciuto dai grandi e dai bambini, anche in quest'epoca di estrema specializzazione delle produzioni culturali. A lui sono dedicati approfonditi studi storici o artistici ed opere divulgative destinate a diversi tipi di pubblico, persino cartoni animati. Si può dire che in Italia quasi tutti provino in qualche misura simpatia ed interesse per questo grande ingegnere e pittore, poeta e scienziato nato in un paesino della provincia Toscana e morto tra le braccia del re di Francia, figliastro illegittimo in una famiglia della borghesia locale ma ammesso nelle più splendide corti, autore di affreschi e dipinti che hanno cambiato la cultura del nostro Paese e della civiltà europea.

Ma in questa grande divulgazione è raro trovare opere che mettano specificamente in risalto gli aspetti matematici dell'opera leonardesca. A questa mancanza aveva già tentato di rimediare uno degli autori di questo libro con una bella pubblicazione di qualche anno fa, indirizzata agli adulti genericamente interessati.

Oggi un gruppo di cui fa parte anche una specialista dell'illustrazione permette ai bambini di rivolgere uno sguardo matematico su Leonardo nelle grandi pagine a tinte azzurro acqua di quest'opera. Le tante immagini che vi compaiono, miste di disegni ed elementi fotografici, rappresentano, tra molte altre cose, alcune costruzioni geometriche leonardesche e ne mettono in evidenza la struttura. Ad esempio, come spiegato in brevi testi che corrono tra le figure in ogni direzione, una successione di quadrati i cui lati stanno in *rapporto aureo* è alla base della costruzione di una spirale, così come dello schema delle proporzioni del corpo umano (l'*Uomo Vitruviano*) e del ritratto di *Monna Lisa*; oppure un pentagono regolare ne racchiude infiniti altri; o ancora, nel campo della geometria solida, si rappresentano le figure ispirate a Leonardo dall'opera del Pacioli. Si citano anche alcune delle opere pittoriche e degli studi fisici ed ingegneristici, così come la scrittura speculare. Il genio e l'entusiasmo di Leonardo divengono una storia per testi ed immagini per la meraviglia e l'intelligenza dei bambini.

Giovanni Giuseppe Nicosia

Raymond Duval (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Prefazione di Bruno D'Amore. Cham: Springer International Publishing.

La teoria semio-cognitiva costruita da Raymond Duval è senza dubbio una delle pietre miliari nell'evoluzione della Didattica della matematica. Non è tuttavia facile approcciarsi a essa in maniera per così dire sintetica, cioè leggendo qua e là nella produzione scientifica dell'Autore. La profondità con la quale egli affronta il ruolo della semiotica nell'apprendimento della matematica, nonché il suo legame con il pensiero matematico, consegue proprio dalla decostruzione dei fenomeni impliciti fino alle loro origini, che stanno al di là dei contenuti matematici. È naturale che una teoria di questo tipo abbia diversi livelli di interpretazione e che quelli più autentici possano a volte rimanere celati per sempre a chi l'ha studiata in maniera superficiale. Il presente libro ha un duplice vantaggio: esso costituisce un'ottima sintesi delle principali idee che sostengono la teoria, consentendo anche a chi si approccia per la prima volta a essa di avere un quadro sufficientemente completo degli elementi che la compongono (quindi una comprensione estensiva) e dall'altro di entrare sufficientemente in profondità nel pensiero dell'Autore, arrivando a sfiorare quelle basi a cui abbiamo fatto cenno in precedenza e potendo così iniziare ad apprezzare la sua enorme importanza per i fenomeni di insegnamento-apprendimento della Matematica (quindi una comprensione intensiva).

Come evidenzia Duval nell'introduzione, il libro può essere letto in quattro modi diversi: (i) il classico modo lineare, che consente di seguire e comprendere l'intera linea di pensiero e le "relazioni interne che costituiscono il quadro teorico dell'analisi"; (ii) una lettura incrociata e sinottica, attraverso le parole chiave dell'indice, organizzate in gruppi semantici, in maniera da evitare la compartimentazione di significati; (iii) una lettura pratica, partendo dagli esempi, di cui l'Autore consiglia di vedere sempre almeno due molto diversi; infine, e questa è la modalità di lettura più curiosa, (iv) una lettura del libro come un fumetto: seguendo le immagini, di cui è presente un elenco che può fungere da guida. Come nota Bruno D'Amore nella prefazione, si tratta di una modalità di lettura che richiede un certo coraggio; ipotizziamo che tale coraggio possa essere premiato dall'acquisizione di un punto di vista singolare, che probabilmente indurrà il lettore a completare la "narrazione" per immagini con interpretazioni proprie, creative, a patto che proceda a tale lettura prima della lettura lineare e analitica.

Vediamo di seguito brevemente quali sono i contenuti e qual è la struttura del libro oggetto di questa recensione, fornendo nel contempo una sua possibile chiave di lettura.

Per comprendere la problematica di fondo che viene affrontata dalla teoria dei registri semiotici di Duval, e quindi l'importanza del contributo dell'Autore riassunto in questo libro, è necessario tenere sempre ben presente la particolare caratterizzazione epistemologica della Matematica come un dominio di conoscenza in cui il ricorso alle rappresentazioni semiotiche è necessario per via dell'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici. In questo senso i lavori pionieristici di Duval hanno determinato una svolta epocale nella ricerca in Didattica della matematica. Dagli anni '90 del secolo precedente in poi, il termine "paradosso di Duval" (Duval, 1993, p. 38) venne usato per descrivere il fenomeno paradossale secondo il quale chi apprende la Matematica non può, proprio a causa dell'inaccessibilità diretta dei suoi oggetti, fare a meno di confondere l'oggetto matematico con la sua rappresentazione. Tuttavia, questa affermazione è tutt'altro che trasparente (e non solo per chi si approccia per la prima volta all'argomento) se non si considera la questione in riferimento ai suoi aspetti più profondi a livello storico-epistemologico e filosofico. Ciò che fa Duval nel primo capitolo è preparare il terreno per le successive trattazioni proprio dal punto di vista storico-epistemologico, facendo emergere la teoria dei registri semiotici come una teoria semiotica ad hoc per la matematica,[1] che tiene conto delle peculiarità dei suoi oggetti e del suo linguaggio e del modo di produrre la matematica stessa. La caratteristica principale che emerge da questa analisi è che la relazione tra segno e oggetto in matematica è una relazione di referenza e non di causalità e che essa risulta da un'operazione discorsiva intenzionale di designazione. Inoltre, ciò che determina il potenziale di un segno nell'attività matematica è la sua capacità di essere trasformato in un altro segno. Facciamo notare che un aspetto fondamentale nel lavoro di Duval è il fatto che la teoria dei registri semiotici non si occupa in primo luogo del ruolo del segno nella mediazione semiotica; essa si colloca in una posizione preliminare a tale mediazione, mostrando quali sono i presupposti per così dire tecnici affinché un segno possa assolvere alla sua funzione di mediazione. C'è da chiedersi però quali conseguenze ha questo status particolare della matematica nell'ambito del suo apprendimento, in quanto, come dice l'Autore, il criterio di realtà in Matematica non è empirico, ma è riferito a "tutti i possibili casi che possono essere semioticamente rappresentati o costruiti" (p. 42). Questo significa che, a differenza di quanto accade nelle altre discipline, in Matematica lo studente deve apprendere un nuovo modo di apprendere, prima di poter apprendere la Matematica (la ripetizione è chiaramente intenzionale ed è in realtà una ricorsione). Inoltre, è necessario tenere conto del fatto che, se si esamina l'apprendimento della Matematica da un punto di vista semio-cognitivo è necessario individuare le caratteristiche osservabili dell'attività matematica o, come dice Duval, individuare "quali sono i gesti intellettuali che rendono abili nel lavorare matematicamente" (p. 42). Questi due aspetti hanno un'importanza cruciale per la Didattica della matematica poiché mettono in evidenza gli aspetti cognitivi, pre-contenutistici di cui è necessario tenere conto nella progettazione delle attività didattiche.

Nel secondo capitolo Duval analizza proprio gli aspetti appena delineati, mostrando, in base ad esempi sui numeri naturali (quindi accessibili senza difficoltà a docenti di ogni grado e anche a un pubblico di non matematici), come durante l'attività matematica sono due i compiti fondamentali che il soggetto che è chiamato a compierla deve soddisfare: deve saper stabilire se due rappresentazioni semiotiche diverse nei contenuti rappresentano lo stesso oggetto matematico e deve essere in grado di produrre e considerare altre rappresentazioni dello stesso oggetto, in parallelo o alternativamente. Per poter assolvere al primo compito, il soggetto deve essere in grado di individuare le unità di significato che racchiudono il contenuto delle rappresentazioni semiotiche e di stabilire una corrispondenza biunivoca tra tale unità di significato di due rappresentazioni dello stesso oggetto in due registri semiotici distinti.

[1] Naturalmente questo non significa che essa non sia esportabile in altri ambiti, come hanno dimostrato D'Amore e Prieto Fandiño (2017).

Nel terzo capitolo, dopo aver caratterizzato l'attività matematica come attività di trasformazione di rappresentazioni semiotiche e aver mostrato dunque la profondità delle cause di difficoltà nella comprensione degli studenti durante le attività di apprendimento, Duval passa alla caratterizzazione dettagliata del termine "registro semiotico" e distingue le trasformazioni in trattamenti (all'interno dello stesso registro) e in conversioni (tra registri semiotici diversi), mettendo in evidenza la necessità per un sistema semiotico di soddisfare due caratteristiche affinché possa essere considerato un registro semiotico: la necessità di produrre rappresentazioni che consentano l'accesso a oggetti inaccessibili percettivamente o strumentalmente, ma soprattutto la necessità di fornire un campo di operazioni specifiche che consentano di trasformare le rappresentazioni prodotte in altre rappresentazioni all'interno dello stesso registro o in un registro diverso (Duval, p. 68). La necessità di attivare almeno due registri semiotici diventa evidente dal fatto che solo attraverso il confronto è possibile riconoscere gli invarianti di significato nelle rappresentazioni e delimitare le unità di significato matematicamente rilevanti; infatti, una semplice contrapposizione di rappresentazioni in diversi registri dello stesso oggetto non è sufficiente per attivare l'apprendimento. Nel terzo capitolo gli esempi sono tratti dalla geometria (euclidea), in cui questo aspetto emerge con particolare forza poiché in essa la rappresentazione grafica deve essere sempre accompagnata da una giustificazione discorsiva che evidenzia i passaggi logici del ragionamento su di essa, non altrimenti esplicitabili, e richiede un coordinamento in parallelo di due registri semiotici (figurale e discorsivo). Gli esempi tratti dalla geometria mostrano anche che non solo il dire in matematica ha un significato diverso rispetto al dire nel linguaggio naturale, ma che anche il vedere in matematica, e in particolare in geometria, ha una caratteristica intrinseca e in opposizione con il modo di vedere per così dire naturale, spontaneo: una figura può essere vista iconicamente, rilevando aspetti metrici o topologici oppure non-iconicamente, cioè come inserita in una rete più completa di tracciati, che consentono una sua decostruzione dimensionale.

Nel quarto e ultimo capitolo Duval fornisce ciò che consente di toccare con mano l'efficienza di una teoria come strumento metodologico: esempi della sua spendibilità in aula, soprattutto in termini di individuazione di metodi di analisi e identificazione delle variabili cognitive. Ma per una esposizione di questi aspetti non si può che rinviare alla lettura del libro.

In conclusione, ci preme sottolineare che ciò che viene proposto nel presente lavoro è un'analisi cognitiva, tramite la teoria dei registri semiotici, di ciò che dovrebbe avvenire affinché lo studente sviluppi una consapevolezza delle operazioni cognitive specifiche richieste nell'attività matematica, per esempio quando si tratta di mettere dati in equazioni oppure di trasformare una figura geometrica in un'altra nella risoluzione di problemi. Ciò che non viene fatto in questo libro è un'analisi del ruolo dei segni come mediatori nell'accesso ai contenuti matematici, anche se questo aspetto rimane sempre sottinteso. Rimarchiamo questo fatto poiché riteniamo importante evidenziare che per comprendere e apprezzare questo libro è necessario essere pronti a distinguere un saper fare cognitivo da un sapere matematico, di cui il primo è il prerequisito per il secondo.

Riferimenti bibliografici

D'Amore, B., & Prieto Fandiño, J. L. (2017). Semiotica e architettura: Progetti "realizzati" e costruzioni semiotiche. *Nuova Meta*, *24*(*39*), 60–73. Disponibile su https://rivistaartenuovameta.it/archivio/220-numero-39

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*(1), 37–65.

Miglena Asenova

Prefazione a:

Giulia Jaculli e Maurizio Matteuzzi (2018). *L'arcivernice: Pensieri inattuali sulla modernità*. Prefazioni di Bruno D'Amore e Francesco Bianchini. Bologna: Diogene Multimedia.

Tanti tanti anni fa scorrevo con avidità le copie del *Corriere dei Piccoli*. Non l'avevo in casa, credo fosse totalmente estraneo alle idee dei miei genitori acquistare una cosa simile, ma alcuni miei amici vicini di casa ne avevano delle copie o, meglio, le avevano messe da parte i loro genitori. Ricordo che ai miei amici non piaceva molto questo giornale illustrato, mentre io lo trovavo affascinante, forse per la sua irraggiungibilità. In quelle occasioni ho scorso qualche puntata dell'*Arcivernice* di Giovanni Manca, che aveva come protagonista, a volte goffo, a volte irritante e a volte geniale, quel Pier Cloruro de Lambicchi, inventore casuale di questo potente strumento che, come tutti sanno, richiama brevemente in vita i personaggi anche del passato più remoto, con il solo ricoprirne l'immagine con una pennellata di arcivernice trasparente. Non ne ricordo nemmeno una puntata, credo fosse superiore alle mie forze intellettuali dell'epoca. Né potevo capire la sferzante ironia di questa idea. Però poi, più adulto, in casa di un amico compagno di scuola, scoprii che c'era una collezione quasi completa, raccolta con cura dal fratello maggiore. Ed ebbi così modo di rivedere quel giornale con occhi diversi. In quella occasione sì, vidi qualche puntata dell'*Arcivernice*, ne intuii la potenzialità, ma la classificai fra le avventure di non grande risalto intellettuale, come molti degli altri fumetti a puntate di quel giornale. Colpa della mia ingenuità, forse imputabile ancora alla mia giovane età.

Poi vennero le *Interviste impossibili* mandate in onda dalla RAI fra il 1973 e il 1975 (a questo punto ero quasi adulto), curate da Lidia Motta; ricordo che cercavo di non perderne nessuna, anche perché gli intervistatori dei personaggi-fantasmi erano eccezionali, veri miti per noi giovani di allora; ricordo Italo Calvino e, più volte, Umberto Eco; la sua intervista a Muzio Scevola la ricordo come fosse oggi, un vero colpo di genio. Mi piacque tanto l'idea che, quando il pittore Ferruccio Gard, fra i più stimati del mio personale "elenco degli artisti che contano", mi chiese un testo per un libro sulla sua opera che stava per uscire (AA. VV., 2014), decisi di ricorrere in modo opportuno a questo gioco sottile e il mio testo s'intitolò appunto: *Le interviste impossibili: Bruno D'Amore incontra e intervista Wasilij Kandinskij a Bogotà alla fine di aprile del 2013*. Ho spudoratamente rubato l'idea, ma era il modo migliore per far dire ad altri, dotati di potere culturale notevole, quel che io penso, in modo tale da potermi permettere frasi forti, glissando la responsabilità in prima persona e accentuando il senso del discorso.

Poi, un giorno, vengo a sapere che il mio più caro amico, Maurizio, filosofo di impatto culturale fortissimo e personalissimo, quello che mi ha insegnato a leggere Platone e Aristotele, mio direttore di tesi di laurea in filosofia, mio coautore di innumerevoli pubblicazioni, ha scoperto, grazie a uno studente Erasmus, Ramon Vasquez, sivigliano, in una cantina di una vecchia casa della periferia bolognese, un barattolo di arcivernice, forse lasciato lì proprio da quel Pier Cloruro de' Lambicchi. Anzi, ora ne sono sicuro.

Comincio a leggere quelle puntate geniali, divertenti, avide, profonde, sottili, stordenti, violente, colte, irriverenti, a seconda del tema. Avevo proprio da poco riletto per la millesima volta l'*Apologia* di Socrate, sembra fatto apposta …; e la puntata numero due riguarda proprio lui, una sorta di marcatissima ironia sulle disfunzioni dello Stato. Divento un arcivernicedipendente, senza possibilità di scampo.

Non sempre, nelle varie puntate, Ramon fa vivere personaggi tratti da immagini; a volte Maurizio ne approfitta per divagazioni sue personali, sempre coltissime, sempre pungenti, come quella, fra le prime, sulla statuetta della Madonna; e poi, tempo dopo, quella sul Natale.

E così inizia l'avventura filosofico-critico-analitico-esegetica più eloquente e chiara del mondo, con tanti partecipanti selezionati, fra i quali, per ora: Schopenhauer, Heidegger, Platone (un'interpretazione puntuale davvero personale e geniale), …

Ogni tanto Maurizio permette a Ramon di contattare un matematico, ma sempre legato al mondo della filosofia o dell'epistemologia; e qui sembro chiamato in causa, in ricordo delle nostre discussioni giovanili. Per esempio, il discorso fatto da Cantor a Ramon sull'infinito, sul suo infinito, assomiglia stranamente a nostri dialoghi di tanti anni fa; e Leibniz, che non so mai se classificare in prima battuta fra i filosofi o i matematici, personaggio che abbiamo adorato, studiato insieme, sul quale abbiamo scritto pagine di fuoco, risultato di sintesi per trovare accordi a prima vista impossibili; personaggio sul quale lui ha scritto un'opera stupenda (Matteuzzi, 1979a).

Quel Ramon prende sempre più corpo, sempre più assume le vesti del mattatore; a volte ha l'atteggiamento degli interlocutori più deboli dei *Dialoghi* di Platone, spezzare il discorso di Socrate che sarebbe troppo lungo, dandogli ragione tanto per andare a capo ogni tanto; altre volte sa porre domande sottili e profonde, che costringono il personaggio resuscitato grazie all'Arcivernice a pensieri profondi, anche se all'apparenza semplici, come l'episodio su Cartesio, Dio e il *Padre Nostro*.[2]

Man mano che fa esperienza, Ramon diventa sempre più bravo nelle sue interviste impossibili, a volte creando vere e proprie situazioni straordinarie. Man mano che impara, rimpiange di non aver saputo porre le domande giuste, specie nelle prime interviste; e così, avendo ora più esperienza, avendo parlato anche con Antistene (l'unico allievo di Socrate che, dopo il suicidio, non lasciò l'Attica, nemico acerrimo di Platone e del suo pensiero), decide di richiamare Socrate, per porgli domande più stringenti e profonde … Ma s'accorge che l'Arcivernice funziona una volta sola, non una di più, e dunque che, richiamato alla vita un personaggio, deve approfittare di quell'occasione unica.

Che gioia quando l'editore Diogene Multimedia mi ha chiesto la prefazione a questa raccolta di testi, l'*Arcivernice* messa su carta invece che in un blog. Ho avuto l'occasione di rileggere alcune puntate, di quelle che non ero riuscito a leggere prima e a riconoscere con calma (cosa che la lettura permette e l'ascolto no) certi trucchi narrativi diabolici di Maurizio. Per esempio, non conoscevo l'esilarante *modus ponens* di Poirot. Fantastico l'incontro con Dante, con il suo berretto rosso in testa, che parla delle varie lingue europee e ironizza a più riprese.

Qua e là, lungo il corso della storia, appaiono personaggi veri, visto che Ramon abita in affitto in una casa alla periferia di Bologna (fra lo stare in centro in uno spazio ridotto e in periferia in uno spazio ampio, Ramon ha scelto la seconda opzione). Cosicché appare Giulia:

> Laura, la padrona di casa, riccia, estroversa, saltava di qua e di là, accendendo le discussioni, provocando risposte. Ramon era seduto sul lato corto di una grande tavola in legno, con Marcello alla sua destra, e Giulia alla sua sinistra. Giulia: non aveva ancora proferito parola. Misteriosa biondina, occhi enormi, attenti, luminosi.

E così Ramon conosce Giulia, la cui descrizione non può che richiamare a chi la conosce proprio Giulia, la persona che al mondo ha conosciuto meglio e in profondità Maurizio, standogli accanto tutta la vita. Non può che finire così, già te l'aspetti:

[2] Il *Padre Nostro* è una preghiera cristiana che, secondo Luca (11.1), è stata insegnata direttamente da Gesù di Nazareth o di Betlemme (circa -7 – circa 26) ai suoi seguaci. Nei due vangeli di Luca e Matteo il testo differisce leggermente.

> Ramon capì che si era innamorato. E da lì si decise: Giulia doveva essere sua. Qualche incontro di tono intellettuale, qualche allusione, la scoperta dei suoi interessi per l'arte e la psicologia, qualche sguardo di complicità. E infine il successo.

Ma chi è che s'innamora, Ramon o Maurizio?

E così, Giulia entra nel meccanismo narrativo e comincia la sua avventura con l'Arcivernice. Comincia con il far rivivere Freud, poi discuterà con Goya, Duchamp, Andy Warhol, Lombroso, Lacan, Picasso eccetera. E avrà con ciascuno di loro dialoghi appassionanti e profondi, rivelatori.

Ma non ci sono solo personaggi illustri richiamati in vita, in questo affascinante racconto a puntate; ci sono ladri, un cane carlino[3] di nome Carlo, mille scorribande etiche e politiche di Maurizio, scritte con quel suo carattere di sottile ironica denuncia che gli era così facile e spontaneo. Per esempio, trovo pungente come tratta la storia del muro contro gli studenti all'Università di Bologna.

Nella storia sempre più fitta, c'è Ramon che sogna e che partecipa a tavole rotonde con Giulia, Ramon che discute di logica e di filosofia con il suo professore il quale gli fa capire che potrebbe avere senso una teoria delle teorie … E come non possono venirmi in mente qui altri scritti di Maurizio? (Matteuzzi, 1977; 1979b; 1981; 1986).

A un certo punto, finalmente, attese, appaiono puntate a firma di due autori, Giulia e Maurizio; e la prima volta viene riformulata una domanda già fatta: "Tu che studi psicologia, Giulia, che cos'è la mente?". I due stili di scrittura e d'interpretazione del mondo s'intrecciano, fra la logica, la psicologia, la filosofia, la storia, il pensiero astratto …

Il tempo passa, Ramon conosce sempre meglio Giulia, innamorato ma non per questo deciso a darle sempre ragione:

> Giulia. Che tipo. Che scrittura elevata. Per questo me ne sono innamorato, pensò Ramon. Affascinante, anche quando ha torto. Torto marcio: la filosofia non si può giudicare, senza dare luogo a una nuova filosofia. È una condanna, o se si vuole un'ancora di salvataggio. Tanta cicuta è stata ingoiata. Ma non ne esiste abbastanza al mondo per far morire la filosofia: sarebbe una filosofia.

Verso il fondo, Ramon incontra finalmente Euclide, c'era da aspettarselo; ma non dico nulla, non commento questo colloquio per non privare della sorpresa il mio lettore (come direbbe Descartes); anzi, non dirò più nulla, altrimenti l'Editore mi potrebbe rimproverare e dirmi che queste mie poche righe hanno già detto e illustrato tutto per cui nessuno comprerà più il libro e si limiterà a leggere solo queste mie tre pagine. Mi fermo dunque …

---

[3] Si chiama "carlino" una razza canina cinese di origini antichissime; il curioso nome Carlin in Francia e Carlino in Italia è dovuto al nome dell'attore Carlo Bertinazzi (1710 – 1783) che, nell'interpretare il personaggio di Arlecchino, usò una maschera nera i cui tratti salienti facevano evidente riferimento a quel cane.

Anzi no, non ce la faccio. C'è un ultimo punto che avidamente aspettavo fin dalle prime puntate di tanti anni fa (credo che la prima puntata sia stata messa in rete l'11 novembre 2011).

Ramon parla con Enzo Melandri, il maestro vero di Maurizio, quello che sempre riconobbe come il suo plasmatore, che non abbandonò e non tradì mai; anch'io lo adoro, quella sua *La linea e il circolo*, pubblicato nel 1968: è uno dei trattati filosofici più geniali del secolo XX (Melandri, 1968). Questo colloquio va letto pensando che Ramon, in fondo, potrebbe interpretare pensieri e sentimenti di Maurizio … Va letto con commozione e tensione, non è un colloquio qualsiasi.

Riferimenti bibliografici

AA. VV. (2014). *Ferruccio Gard: Energie cromatiche: Opere 1969–2013*. Padova: Peruzzo.

Matteuzzi, M. (1977). A note on the notion of "theory". *Quality and Quantity*, *11*(1), 67–71.

Matteuzzi, M. (1979a). *L'universo logico per un'analisi del concetto di teoria*. Faenza: Faenza Editrice.

Matteuzzi, M. (1979b). Per un calcolo ideografico puramente meccanico. In AA. VV. (Eds.), *Sull'identità del pensiero moderno*. Firenze: La Nuova Italia.

Matteuzzi, M. (1981). *La forma della teoria: Studio sull'espressione dell'invarianza*. Faenza: Faenza Editrice.

Matteuzzi, M. (1986). *Universo, linguaggio, logica dell'informatica* (Vols. 3). Bologna: Calderini.

Melandri, E. (1968). *La linea e il circolo*. Bologna: Il Mulino.

Bruno D'Amore

In ricordo di Maurizio Matteuzzi

Un pensatore profondo e singolare nel panorama filosofico italiano

L'Università di Bologna ha perso un docente di immenso valore, stimato dai colleghi, amato dagli studenti, ben noto per le sue battaglie di civiltà, anche al di fuori dell'Alma Mater.

Ci siamo conosciuti giovanissimi, figli di due colleghi di lavoro che si stimavano, essendo noi due praticamente coetanei. Era il 1965, rapido scambio di idee, ma poi uno si iscrive al corso di laurea in matematica, l'altro in filosofia. Uno si laurea nel luglio 1969, l'altro l'anno dopo. Abbiamo una fortuna condivisa: eccellenti maestri che frequentiamo entrambi; a matematica Ettore Carruccio (storico) e Francesco Speranza (geometra ed epistemologo), a filosofia Enzo Melandri (l'autore di quel *La linea e il circolo* che dovrebbe essere considerato uno dei colpi di genio del secolo XX) (Melandri, 1968). Li visitiamo, spesso, tutti e tre, anche se con modalità assai diverse. Ma soprattutto, ci frequentiamo noi due, scrivendo insieme soprattutto di logica (sulla *consequentia mirabilis* e sull'implicazione nelle logiche polivalenti, 1972; sugli insiemi allora detti indecidibili; eccetera) (D'Amore & Matteuzzi, 1972a, b; 1973). Nel frattempo, ciascuno dei due pubblica ricerche e studi più affini alla propria pertinenza culturale, per conto proprio. Su invito di Francesco Speranza, insieme lavoriamo anche a un progetto didattico edito in Italia da Zanichelli, l'allora famoso *Nuffield Project* (D'Amore & Matteuzzi, 1972c).

La stima reciproca è immensa, ci si vede praticamente tutti i giorni, si affitta un appartamento nel cuore della vecchia Bologna, che condividiamo. Uno dei due ci vive, l'altro solo ci lavora.

Ci viene in mente un'idea folle, pubblicare una storia della matematica che sia anche storia del pensiero matematico, dunque principalmente matematica, sì, ma senza dimenticare il progresso epistemologico della disciplina, non solo formalismi, teoremi e teorie, ma anche pensiero. Siamo consapevoli di essere troppo giovani per questa avventura, ma i nostri tre mentori ci sostengono a spada tratta.

La base saporita e affascinante della comune avventura sono lunghe discussioni micidiali sui punti più controversi che arricchiscono entrambi, so di poterlo dire. Il libro alla fine è pronto, attorno al giugno 1974; ma Zanichelli ci dice che è troppo lungo, che a loro interessa solo la parte più moderna, dal Rinascimento in poi. E così lo spezziamo in due volumi autonomi (mica tanto). Pubblichiamo la parte più moderna della storia a Bologna, con Zanichelli (D'Amore & Matteuzzi, 1975), quella più antica a Venezia, con

Marsilio (D'Amore & Matteuzzi, 1976).

Più o meno in quel periodo faccio conoscenza con la didattica della matematica, da neofita inesperto; semplicemente mi metto a frequentare qualche seminario; solo nel 1984 comincio a studiarla per davvero e solo a fine anni '80 decido di seguirla come mia strada principale di ricerca. Maurizio diventa un provetto informatico teorico riuscendo a innestare la filosofia, una sua dotta filosofia del linguaggio, assai personale, all'interno di quel che allora a me sembrava solo tecnica. Sarà sempre più colto di me, in questo campo.

I suoi studi, che seguo con passione, sono sempre più profondi; scrive un libro per Calderini che pubblica nel 1986 per il quale mi chiede una recensione; leggerlo/studiarlo mi fa impazzire, ma quante cose imparo (D'Amore, 1987)! Lo stesso succederà nel 2008 (D'Amore, 2008) e poi nel 2013 (D'Amore, 2013), altre recensioni per due studi profondissimi. Mentre io chiedo a lui la prefazione a un libro che scrivo con Martha e che pubblica l'editore Dedalo di Bari nel 2013 (Matteuzzi, 2013).

Negli anni intermedi ci frequentiamo sempre, a volte non fisicamente, ma di continuo. Io sono il suo referente matematico, lui il mio filosofo preferito; tanto è vero che, quando mi laureo in filosofia, primi anni '90, gli chiedo di farmi da direttore di tesi.

Molti anni dopo decidiamo di scrivere, con Maura e Martha, un lunghissimo articolo su un tema che, pur avendo origine nella didattica della matematica, è però totalmente filosofico e semiotico; lavoriamo insieme tutti e quattro quasi un paio d'anni, e poi l'articolo esce in una versione ridotta in italiano nel 2013 (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2013) e poi nella sua forma completa in spagnolo nel 2014 (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2014).

Decidiamo che siamo un gruppo formidabilmente coeso, forte per le sue diverse competenze, e così partiamo per un'altra avventura che deve per forza di cose iniziare con una discussione filologica su alcuni termini filosofici controversi; e così, dopo la solita discussione stimolante, diamo a lui l'incarico di iniziare, anzi Maurizio assume questo gravoso incarico da sé. E adesso? Adesso ho alcune sue frasi scritte, prolegomeni alla teoria che avremmo dovuto creare, che nessuno potrà mai completare.

Un vuoto che dilania cervello, cuore e coscienza.

Abbiamo discusso, studiato, creato, affrontato dilemmi ed enigmi per decenni; lui era sempre pronto alla battuta, colta, mai volgare, profonda. Sottile, ironico, divertente.

Ha inutilmente tentato di insegnarmi a giocare a biliardo, versione boccette, nel quale era un vero maestro; nonostante mi desse spiegazioni matematiche di quel che stava per fare per istigarmi a farlo, non sono mai riuscito a capire davvero come facesse. Fallimento totale. Si era inventato un codice binario per comunicare le carte da briscola, questo l'ho imparato immediatamente, la matematica era più evidente; e così abbiamo vinto in un bar di via Belvedere, a Bologna, vicino al mercato delle erbe di via Ugo Bassi, un torneo di briscola a coppie; ma poi ci siamo così vergognati, che non abbiamo ritirato il premio, un maestoso, solenne prosciutto di Parma.

Stare con lui era sempre un'avventura intellettuale. Vederlo ascoltarti mentre gli dicevi qualcosa, pungolante. Cercare una citazione di Aristotele nel *mare magnum* di tutto quel che ha scritto, lo poteva fare solo lui in tempi brevissimi, quando cominciava col dirti: Mi pare che sia …

Aveva un dono per la matematica, forse poca dimestichezza con i formalismi avanzati, ma un'intuizione formidabile; e riusciva a farne un uso massiccio in tutta la sua produzione.

Aveva una visione politica generosa e netta, disposto a giocare le sue tesi in prima persona; mai allineato nella banalità e nelle convenienze strategiche, sempre pronto alla discussione, alla lotta, anche violentemente verbale. Una straordinaria visione colta, aperta e lungimirante.

La sua opera filosofica mi ha molto influenzato, tanto da far mie, oggi, frasi di Maurizio che ho letto e riletto, spesso commentato (non sempre benevolmente) con lui.

In *L'universo logico per un'analisi del concetto di teoria* (Matteuzzi, 1979a), con premessa di Enzo Melandri, Maurizio espone logiche formali nel tentativo di creare una sorta di teoria delle teorie, o almeno di creare strumenti per il confronto fra teorie (cap. VI); questo tema lo ha appassionato parecchio fin dagli anni precedenti (Matteuzzi, 1975; Matteuzzi, 1977; nel testo del 1975 riporta per iscritto fitte discussioni tra l'autore, "il filosofo Enzo Melandri e il matematico Bruno D'Amore"). Credo che culmine parziale di questi studi si possa considerare un libro dal titolo significativo: *La forma della teoria*, fortemente melandriano (Matteuzzi, 1981). Discutemmo le tesi qui sostenute e le modalità delle loro esposizioni; conservo ancora la corrispondenza epistolare che ci scambiammo in questa occasione, lui per iscritto a mano, io a macchina. Vedo oggi che le mie note erano fortemente critiche non tanto sul contenuto, quanto sulla forma logica dell'esposizione. Ma l'impianto regge.

Siamo stati entrambi follemente innamorati di Leibniz soprattutto, credo, perché sia Carruccio che Melandri lo erano, anche se per ragioni assai diverse; lui è rimasto realista, di un realismo leibniziano fortissimo e vagamente platonizzante, come gli dicevo spesso; mentre il mio navigare in terre didattiche, dove l'elemento umano è assai pregnante, dunque con tentazioni di stampo wittgensteiniano, mi ha portato a posizioni più pragmatiste. Un suo studio su Leibniz (Matteuzzi, 1983) resta un dotto esempio di cultura assoluta.

Io credo di poter sostenere che proprio la *characteristica leibiziana* e la visione carrucciana di essa abbia segnato fortemente Maurizio, e l'abbia spinto verso una strada tutta sua che molti ascrivono alla filosofia del linguaggio ma che, per me, è molto di più, una visione della logica e del ragionamento umano assai più vasta e comprensiva. Ne è testimone un suo studio nel quale si preconizza un calcolo ideografico puramente meccanico, com'era nella tradizione medievale e nel *sogno* di Leibniz (Matteuzzi, 1979b).

E qui inizia un'altra splendida storia che sarebbe troppo lungo citare nei singoli dettagli; mi limito a una scelta personale, ricordando i tre formidabili volumi: *Universo, linguaggio, logica dell'informatica* (Matteuzzi, 1986).

Tra le tantissime opere successive, pubblicate a ritmo serrato, scelgo di citare Barile, Eletti e Matteuzzi (2013). Per evitare fraintendimenti, non si creda che Maurizio si fosse trasformato in un informatico; se leggiamo anche solo i titoli dei contributi a suo nome, si vede subito che la matrice filosofica non l'ha mai abbandonato; il suo problema non è informatico, è logico, gnoseologico puramente filosofico, ancora di filosofia del linguaggio e della conoscenza.

Devo a Maurizio la mia attuale capacità di leggere e di discutere di filosofia, per quel che modestamente posso; il suo esempio di chiarezza epistemologica mi ha forgiato. Ci sono autori che lui mi ha fatto capire, molti classici greci e medievali, per esempio, e poi Leibniz e Vailati. Si discuteva di queste cose nei luoghi e nei tempi più impensati, luoghi e tempi della memoria, incancellabili.

Mentre scrivo queste parole che mi tormentano, l'editore bolognese Diogene Multimedia di Bologna mi manda una raccolta di eccezionali spunti critici, etici, politici filosofici dal titolo complessivo *Arcivernice*, scritti con Giulia, chiedendomi una prefazione; l'idea è geniale, glielo avevo già detto a voce, leggendo qualche puntata on line; ma questa prefazione non potrà mai leggerla, discuterla, apprezzarla o discuterla con me, come avremmo fatto fino a pochi anni fa.

Riferimenti bibliografici

Barile, S., Eletti, V., & Matteuzzi, M. (Eds.). (2013). *Decisioni e scelte in contesti complessi*. Padova: Cedam.

D'Amore, B. (1987). [Recensione a: Matteuzzi, M. (1986). *Universo linguaggio logica dell'informatica*. Bologna: Calderini]. *Periodico Mathesis Bologna*, *3*(7), 16–18.

D'Amore, B. (2008). [Recensione a: Bianchini, F., Gliozzo, A. M., & Matteuzzi, M. (Eds.). (2008). *Instrumentum vocale: Intelligenza artificiale e linguaggio.* Bologna: Bononia University Press]. *La matematica e la sua didattica*, *22*(4), 586–587.

D'Amore, B. (2013). [Recensione a: Matteuzzi, M. (2012). *La teoria della forma: Studio sull'invarianza dell'espressione*, Roma: Aracne]. *Bollettino dei docenti di matematica*, 66, 124–126.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2013). Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto "paradosso di Duval". *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *36B*(3), 207–236.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *18*(2), 177–212. doi:10.12802/relime.13.1822

D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1972a). Generalizzazione della "Consequentia mirabilis" nelle logiche polivalenti. *Lingua e stile*, *7*(2), 343–372.

D'Amore, B., & Matteuzzi M. (1972b). Sulla definizione di una implicazione nelle logiche polivalenti che soddisfi la transitività e che rispetti la struttura di reticolo di Boole. *Bollettino UMI*, *4*(6), 385–396.

D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1972c). Traduzione di: *Figure in movimento*. Progetto Nuffield. Bologna: Zanichelli.

D'Amore, B., & Matteuzzi. M. (1973). Considerazioni strutturali sugli insiemi indecidibili. *Bollettino UMI*, *4*(8), 537–546.

D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.

D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.

Matteuzzi, M. (1975). Un'altra ipotesi sui linguaggi misti. *Versus*, *5*(11), 41–52.

Matteuzzi, M. (1977). A note on the notion of "theory". *Quality and Quantity*, *11*(1), 67–71.

Matteuzzi, M. (1979a). *L'universo logico per un'analisi del concetto di teoria. Faenza: Faenza Editrice*.

Matteuzzi, M. (1979b). Per un calcolo ideografico puramente meccanico. In AA. VV. (Eds.), *Sull'identità del pensiero moderno*. Firenze: La Nuova Italia.

Matteuzzi, M. (1981). *La forma della teoria: Studio sull'espressione dell'invarianza*. Faenza: Faenza Editrice.

Matteuzzi, M. (1986). *Universo, linguaggio, logica dell'informatica* (Vols. 3). Bologna: Calderini.

Matteuzzi, M. (2013). Prefazione. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla, *La nonna di Pitagora: L'invenzione matematica spiegata agli increduli* (pp. 5–7). Bari: Dedalo.

Melandri, E. (1968). *La linea e il circolo*. Bologna: Il Mulino.

Bruno D'Amore

In ricordo di Aldo Spizzichino

Uno dei maggiori interpreti italiani della *Computer Art*

La sera di venerdì 4 novembre 2016, nel Salone delle Terme di Castel San Pietro, proprio il giorno dell'inaugurazione del 30° Convegno Nazionale *Incontri con la Matematica*, Aldo Spizzichino, fisico del CNR, uno dei maggiori interpreti della Computer Art in campo nazionale, tenne, su mio personale invito, una conferenza applauditissima e profonda sul tema: *Ars Geometrica: dal pensare per immagini a immagini per pensare*.

Il giorno prima, venerdì 3 novembre, aveva inaugurato una personale presso la Galleria comunale di Arte moderna, sempre a Castel San Pietro, da me organizzata, dal titolo: *L'Arti-Giano Bifronte: Tra Scienza e Arte per gettare un ponte*. Nel catalogo, a cura dell'Associazione *Incontri con la Matematica*, una dotta presentazione del caro amico, profondo critico d'arte, docente a Brera, Claudio Cerritelli.

Non era la prima occasione di collaborazione; in passato l'avevo presentato varie volte in occasione di sue personali; Martha e io l'avevamo invitato il 6 ottobre 2007 a Castel San Pietro Terme alla *Festa della Matematica in piazza e nel Castello*, occasione nella quale gli facemmo conoscere il caro amico Piergiorgio Odifreddi, che poi lo invitò a sua volta in varie occasioni, per esempio all'Università di Heidelberg in occasione di un importante incontro internazionale di matematici. Aldo preparò con estrema cura la mostra: Exhibition Math = Art. *Computer Art Exhibition by Aldo Spizzichino*, che si svolse dal 23 al 28 settembre 2017. Ma purtroppo, lui non poté essere presente perché era venuto a mancare durante il mese di giugno.

Le sue eccezionali opere sono di una profondità indicibile, prepotentemente e visibilmente intrise davvero di quel binomio arte/matematica di cui spesso si parla; nelle sue opere questa dualità indicibile è palpabile, sotto gli occhi di tutti. Nel nostro appartamento di Bogotá, un'intera parete raccoglie dieci delle sue opere, uno dei fiori all'occhiello della nostra enorme collezione.

Aldo Spizzichino (1941 – 2017), *Tarsia transfinita*, 2007. Collezione privata Bogotá.

La sua mancanza fisica nel panorama nazionale colpisce profondamente gli amanti di questo genere di arte, che sono molti, dotti, sempre più numerosi e avidi di veri maestri non improvvisati.

Per rendergli omaggio, riporto qui sotto il testo della mia presentazione in catalogo alla sua mostra personale, *Morfeonica*, 4–11 settembre 2010, tenuta nella Sala *Silentium* del Quartiere San Vitale, a Bologna.

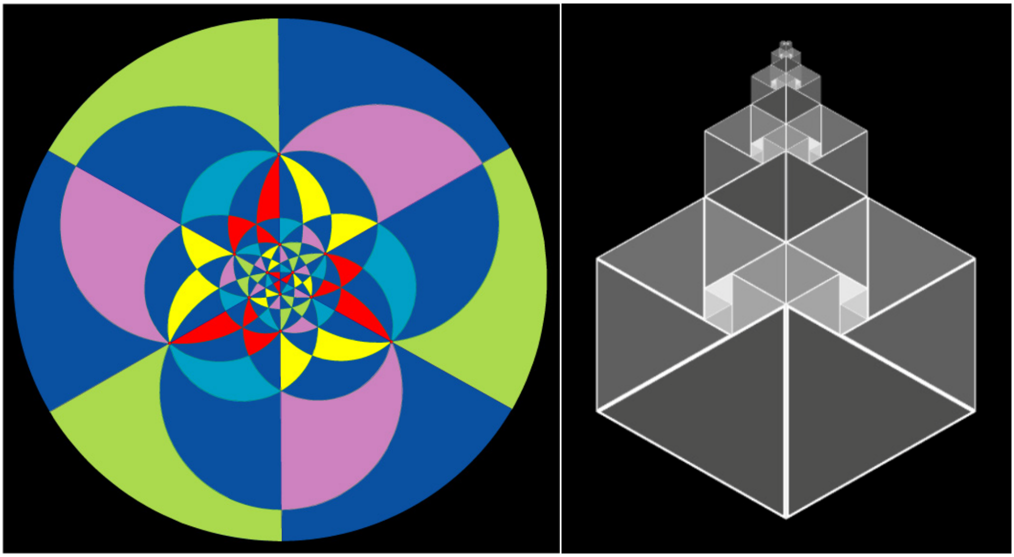
> Credo sia la terza o quarta volta che scrivo alcune righe sull'opera di Aldo Spizzichino, per presentarlo al pubblico a lui più vicino, quello degli scienziati, ma soprattutto a quel tipo di pubblico che frequenta le gallerie d'arte per l'arte e non per le scienze che a quell'arte sottostanno (supporto o ispirazione).
>
> Questa volta voglio dire qualcosa in più.
>
> C'è un celeberrimo aneddoto a proposito del matematico tedesco David Hilbert, uno degli astri più fulgidi nella storia della cultura universale. Quando gli comunicarono che uno dei suoi allievi di dottorato aveva lasciato la matematica per dedicarsi alla poesia, Hilbert commentò: Me l'aspettavo, avevo già notato che non ha abbastanza fantasia per la matematica.
>
> Questa faccenda, la fantasia nella creazione matematica, è un'arma che spesso noi matematici usiamo per controbattere coloro che vogliono ascrivere la fantasia al mondo delle arti e riservare come dominio della matematica il rigore, le formule, il ripetitivo, il noioso, perfino il mnemonico ...

Ma tanto, non ci crede nessuno; la grande maggioranza di coloro che leggono questo testo, che frequentano le gallerie d'arte, che leggono letteratura e che vanno a teatro, fa fatica ad accomunare i due termini "matematica" e "fantasia", evocando l'astrazione che li lega in una comune ricerca.

Di fronte alle opere di Aldo, però, dovranno ricredersi. Sì, è vero, Aldo è un fisico, non un matematico, ma maneggia le matematiche cose in modo tale da suscitare invidia in più d'uno tra noi. Come diavolo faccia a obbligare il suo pur semplicissimo strumento, un portatile da quattro soldi senza software commerciale, a creare queste immagini, a dare le sfumature, a intrecciarsi in queste ardite maniere, lo sa solo lui. Ditemi voi se non ci vuole, all'un tempo, una sfacciata fantasia creatrice e una competenza tecnica fuori dall'ordinario.

Ma questo, semmai con altre parole, l'ho già detto.

Quel che ulteriormente sorprende nelle ultime opere è la grazia affascinante, la forma attraente, la sinuosa figuratività alle quali Aldo dà rilievo, giocando con il sottile e ancestrale mito della visione. Aldo, sempre più pittore, sempre più artista, sempre più matematico. Le sue opere sono a tutti gli effetti opere d'arte pittorica, non importa il mezzo con il quale sono state ottenute.



Alcune opere di Aldo Spizzichino.

E qui scatta in me il critico d'arte con cui il matematico è abituato schizofrenicamente a convivere da oltre trent'anni.

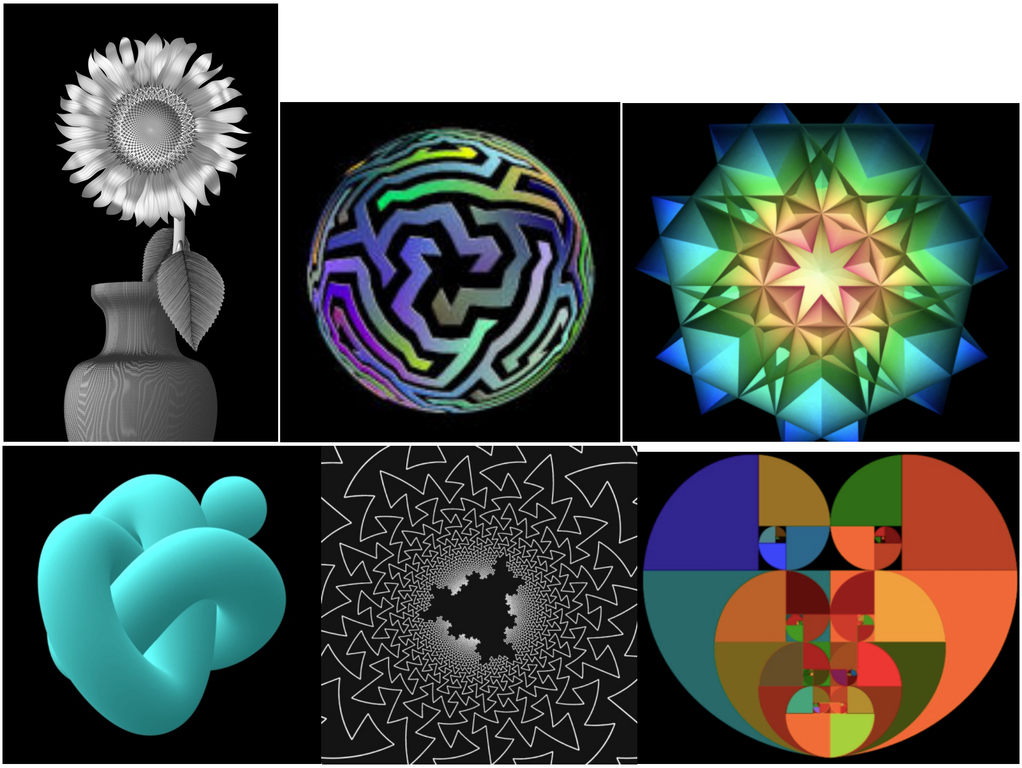
Sono per lo più opere liriche, nelle quali le forme hanno diritto d'esistenza estetica, sovrapposizioni inusuali e ardite, sinuosità che ti conquistano, percorsi all'un tempo visivi e cerebrali che giocano d'astuzia rappresentazionale, che costringono l'osservatore a giochi di effetti spesso inattesi e minuziosi, che catturano la logica della visione, per tradirla e assecondarla, e per poi assoggettarla.

Un risultato pittorico davvero sorprendente e sublime.

Ma il discorso tecnico vale anche in pittura; quante tecniche sono state utilizzate dall'essere umano nelle rappresentazioni pittoriche attraverso i millenni, dalla pressione della mano densa di colore sulla parete di una grotta, fino alle lastre di pietra o di metallo, fino a ... al computer di Aldo, per l'appunto. Negli ultimi decenni, gli strumenti che gli artisti hanno utilizzato per le loro creazioni sono stati molteplici, ma il computer è certo uno dei favoriti. Per quanto colore acceso, figure allusive, arditi spazi conquistino il gusto tutto umano per le forme astratte, resta però sempre qualche cosa di meccanico all'interno e l'ansia di non saper decidere *chi* sia il vero autore dell'opera in questione, ansia soprattutto presente quando l'opera ti conquista.

In questo caso, è indubbio, l'autore è Aldo, chi obbliga lo strumento a fare quel che tu vuoi che faccia, come lo scultore con lo scalpello, l'architetto con i materiali, il pittore con i pennelli, ...

E allora non puoi fare a meno di restare affascinato e meravigliato all'un tempo e ringrazi il Cielo di saper cogliere la bellezza delle forme e saper apprezzare la spregiudicata matematica che ci sta dietro.



Altre opere di Aldo Spizzichino.

So per certo che le sue opere verranno ancora e per sempre richieste dai galleristi e dai critici in occasioni di future mostre, a testimonianza di un lavoro pluridecennale nel campo della razionalità abbinata all'arte.

Chiamo a testimoni le seguenti parole di Einstein (dette a Berlino nel 1921) per confermare l'essenza scientifica e all'un tempo artistica dell'opera di Aldo, perché ho sempre pensato che quell'apparente dualismo delineato nelle sue due ultime frasi non indichino un'intersezione vuota:

> Quando il mondo cessa di essere il luogo dei nostri desideri e speranze personali, quando l'affrontiamo come uomini liberi, osservandolo con ammirazione, curiosità e attenzione, entriamo nel regno dell'arte e della scienza. Se usiamo il linguaggio della logica per descrivere quel che vediamo e sentiamo, allora ci impegniamo in una ricerca scientifica. Se lo comunichiamo attraverso forme le cui connessioni non sono accessibili al pensiero cosciente, ma vengono percepite mediante l'intuito e l'ingegno, allora entriamo nel campo dell'arte.

Bruno D'Amore

In ricordo di Vinicio Villani

Com'è duro scrivere questo genere di pagine; mentre lo fai, il cuore ti si strazia perché ti rendi conto che stai parlando di una persona che ha avuto una grande influenza sulla tua vita, che ti ha gratificato con la sua amicizia e la sua stima, eppure non glielo hai mai detto nella forma completa e sincera che sarebbe stata opportuna, esprimendo la gratitudine che provi. E ora non glielo puoi più dire. Quel che ti spinge è il desiderio di rendere omaggio, privato e pubblico, a qualcuno che lo merita davvero.

Vinicio Villani è morto i primi di febbraio di questo 2018. Era nato nel 1935 in Croazia, a Lussinpiccolo, sull'isola di Lussino, nel mar Adriatico, in Croazia. Ha frequentato la Scuola Normale Superiore di Pisa, dove si è laureato nel 1957. E poi è stato docente nelle università di Genova e Pisa. La fama dei suoi studi in geometria l'hanno portato alla presidenza dell'Unione Matematica Italiana UMI dal 1982 al 1988, proprio gli anni in cui si stava diffondendo in Europa un modo moderno e scientifico di vedere la didattica della matematica; ma la sua passione per i problemi dell'insegnamento-apprendimento (a tutto campo, non solo la conoscenza della ricerca in didattica, ma anche come attività quotidiana in aula) lo aveva condotto alla presidenza della Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica CIIM già dal 1974 al 1979.

Nonostante il suo alto valore scientifico, molti di noi e molti insegnanti lo ricordano soprattutto per il suo costante impegno nel mondo della scuola militante, per i suoi libri a contenuto didattico come il famoso *Matematica per Discipline Bio-mediche* (McGraw-Hill, terza ed. 2001). E tanti altri, alcuni dei quali citerò fra breve.

Il suo impegno, infatti, è stato soprattutto quello di interloquire con gli insegnanti, partecipando in modo attivo a occasioni di confronto pubblico (seminari, conferenze, convegni, corsi di formazione) e alla scrittura di molti libri di matematiche elementari (cioè sugli elementi di base), denotando una sua passione speciale per trattare gli argomenti matematici in modo diretto, semplice, immediato, ma senza mai scadere nel puramente divulgativo, toccando con le sue argomentazioni proprio quel che serve in prima istanza alla formazione docente: riflettere sulla natura degli oggetti elementari (cioè di base) della matematica. [Devo ripetermi sul significato dell'aggettivo "elementare" perché qualcuno ingenuamente confonde "elementare" con "semplice" il che, almeno nel mondo della matematica, non è].

Ho avuto il piacere immenso di avere a che fare con Vinicio in tante occasioni.

Per esempio, ha sempre accettato con grande entusiasmo di tenere conferenze plenarie al convegno *Incontri con la matematica* che dal 1986 (il numero 0, a Bologna) organizzo.

Partecipò al numero 1, quando la sede si spostò a Castel San Pietro Terme, nel 1987, con la relazione sul tema: *L'insegnamento della matematica nella scuola italiana oggi: dalle elementari ai bienni delle scuole secondarie superiori*; al numero 2, 1988, con la relazione: *Quale matematica nell'epoca dei calcolatori?*; al numero 7, 1993, con: *Insegnamento della matematica: la noia della routine quotidiana, la molla della curiosità, il fascino del rischio, la paura dell'ignoto*; al numero 11, 1997, con: *La Matematica è sublime ... Anzi no*.

Quel che subito emergeva e colpiva tutti i presenti era l'alta qualità delle relazioni e l'effetto catalizzatore sul pubblico; ognuna di queste relazioni è oggi testimoniata sui diversi volumi che raccolgono gli Atti del convegno.

Ho poi pubblicato nella rivista che ho fondato e diretto dal 1987, oggi al 26° anno di vita, *La matematica e la sua didattica*, un suo articolo; nel n. 2 del volume 8 (1994) alle pagine 157–167 appare l'articolo di Bencivelli e Villani "Su un test per l'ammissione ad un Corso di Laurea".

In tutte queste occasioni, ricordo sempre con entusiasmo il piacere di scambiare idee e opinioni; la sua profonda cultura non solo matematica emergeva dopo pochi istanti di conversazione.

In particolare, l'essere io stato membro della CIIM dal 1994 al 2000, sebbene Vinicio non avesse più cariche presso l'UMI, fu motivo di diverse chiacchierate amichevoli e per partecipare entrambi a vari eventi.

Ma ci sono due occasioni speciali che mi permisero di conoscere l'uomo Vinicio, due occasioni particolari.

Dal 28 settembre al 2 ottobre 1995 si svolse a Catania l'ICMI Study: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, con partecipazione su invito, diretto da Carmelo Mammana e Vinicio Villani che poi furono i curatori del volume degli Atti: *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Centur* (Kluwer, 1998). Fu per me una grande occasione, soprattutto perché vi conobbi Raymond Duval che frequentai tutti quei giorni tutto il giorno e con il quale nacque un'amicizia profonda che ancora segue anche sul piano familiare; questo fatto mi portò a frequentarlo con assiduità e a trascorrere quasi un paio d'anni come suo studente di dottorato presso l'Università ULCO (Université du Littoral Côte d'Opale), anche se poi finii gli studi dottorali altrove.

Ebbene, il primo giorno che venne dedicato alle discussioni sui lavori di ricerca, Vinicio, d'improvviso e senza preavvertirmi, mi chiese di presentare al pubblico un mio lavoretto di ricerca sull'apprendimento della geometria, lavoro che avevo condotto su allievi di scuola media della provincia di Bologna e che avevo eseguito con un gruppo di studenti del corso di Didattica della Matematica dell'Università di Bologna. Il lavoro non era ancora stato pubblicato, lo sarebbe stato l'anno dopo (1996) sulla rivista italiana

L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate e sul volume: Gagatsis, A., & Rogers, L. (Eds.). (1996). *Didactics and history of mathematics*. Thessaloniki: Erasmus ICP-95-G-2011/11.

Fui molto sorpreso dal fatto che Vinicio sapesse di questa ricerca e inorgoglito dal fatto che mi chiedesse di presentarla in quella occasione. Lo ringraziai mille volte in seguito.

Dal 12 al 21 luglio 1996 si tenne a Siviglia l'ICME 8; io ricevetti la nomina a Chief Organizer del Topic Group XIV, sulla didattica dell'infinito. Uno dei due advisor era proprio Raymond Duval (l'altro non lo ricordo). I lavori, per ovvii motivi di temperatura (Siviglia in luglio!), si svolgevano la mattina e poi riprendevano nel pomeriggio avanzato fino a sera tarda. Vinicio e io ci trovavamo spesso nella piscina dell'hotel, quasi tutti i pomeriggi. Confermo quel che ha scritto il collega Mario Barra in una bella lettera in ricordo di Vinicio, pubblicata lo scorso febbraio su una mailing list: Vinicio amava molto nuotare e ne parlava in modo simpatico e brillante, ma anche un po' ironico. Ci si fermava di tanto in tanto e si chiacchierava di tante cose. E poi, di nuovo, nuoto.

I suoi libri, ben noti, sono tutti splendidi. Voglio solo ricordare che mi chiese nel 2003 di pubblicare il suo libro: *Cominciamo da Zero: Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Aritmetica e Algebra)* sulla collana *Complementi di matematica per l'indirizzo didattico* che io dirigevo (e dirigo ancora) per la casa editrice Pitagora di Bologna. Figuriamoci, altro che permesso, era un bel regalo per la collana. Il libro uscì lo stesso anno, 2003. Inutile che lo descriva, va letto avidamente. Appena uscì ci complimentammo a vicenda e mi annunciò che stava già preparando un libro analogo, ma sulla geometria: *Cominciamo dal punto: Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Geometria)*. E infatti, qualche tempo dopo, quest'altro volume era pronto e io lo accettai con entusiasmo nella stessa collana; fu pubblicato nel 2006. Diversi anni dopo, forse era il 2013, essendo quasi esaurito il primo e avendo avuto ripensamenti e il desiderio di modificare alcuni temi, chiese di ripubblicarlo, ampliato, ponendo come autore anche Maurizio Berni che lo aveva aiutato a riscriverne diverse pagine; io lo accettai nella stessa collana, pubblicandolo nel 2014 come nuova edizione.

Lascio al lettore immaginare come, in ciascuna di queste numerose occasioni, fosse per me gradevole poter scambiare idee e ascoltare molte sue riflessioni, facendone tesoro.

Oltre a quelle qui ricordate, le occasioni di contatti personali e scambi di idee furono numerosissime, specie in occasioni di incontri con insegnanti di scuola, per esempio organizzate dalla CIIM o da altri enti, in altre occasioni. Ricordo una cena sociale a Genova, una sera, a seguito di nostri seminari fatti a un folto gruppo di insegnanti. Dopo pochi minuti, eravamo quasi isolati a scambiarci idee e opinioni; generoso com'era, faceva dono a tutti delle sue idee …

In ognuna di queste occasioni quel che più colpiva era la sua profonda e vasta cultura, la capacità di ascoltare e una grande immensa unica signorilità; ecco, se fossi costretto a dire una sola parola su Vinicio, direi che era un vero signore, di eleganza e di stile, di un'umanità ricca e aperta, di una disponibilità senza uguali.

Bruno D'Amore

La matematica e la sua didattica, Anno 26, n. 1, 2018

ISSN 1120-9968